点集拓扑

孙天阳

2023 年 6 月 8 日

目录

1 PSet01-1

(1)

1. $\sum, \Omega, \bigcup, \sim$
2. $\gamma, \eta, \tau, \epsilon, \rightarrow$
3. $\Gamma, \Lambda, \Upsilon, \pi, \mu$
4. $+, \times$
5. $\aleph$
6. $\prod$
7. Ψ
8. $\geq, \leq$
9. Ξ
10. $\div$
11. Δ, ∇
12. ρ, σ, δ
13. $\varphi, \alpha, \propto$
14. ϕ
15. Φ
16. θ
17. Θ
18. $\bigotimes$
19. β
20. ξ

(2)

(a) Use the intermediate value theorem to prove:at any time, there exists two antipodal points on the surface of the earth which have the same temperature.

(b) Use the Borsuk-Ulam theorem with $n = 2$ to prove: at any time,there exists two antipodal points on the surface of the earth which have the same temperature and the same pressure.

证明.

(a) 设

$$\begin{aligned} f_t : \mathbb{S}^2 \to & \quad \mathbb{R} \\ x \mapsto & \ x\text{点处}t\text{时刻的温度} \end{aligned}$$

记 $\bar{x}$ 为 x 的对径点, 设 $F_t(x) = f(x) - f(\bar{x})$.

假设 $F_t(x) \equiv 0$, 显然成立；假设存在 x_0 使 $F_t(x_0) \neq 0$, 不妨设 $F_t(x_0) > 0$, 显然有 $F_t(\bar{x}_0) < 0$, 由介值定理得存在点 x_1 使得 $F_t(x_1) = 0$.

(b) 断言, 任意连续函数 $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$, 存在 $x_0 \in \mathbb{S}^n$ 使得 $f(-x_0) = f(x_0)$. 若不然, 对任意的连续函数 f, 我们可以定义一个连续对跖函数 $g(x) = f(x) - f(-x)$, 按假设 $g(x)$ 不存在零点, 因此可构造 $h(x) = \dfrac{g(x)}{|g(x)|}$,$h$ 是一个从 $\mathbb{S}^n$ 到 $\mathbb{S}^{n-1}$ 的连续对跖映射, 这与 Borsuk-Ulam 定理矛盾！

设

$$\begin{aligned} f_t : \mathbb{S}^2 \to & \quad \mathbb{R}^2 \\ x \mapsto & \ (x\text{点处}t\text{时刻的温度, 气压}) \end{aligned}$$

应用断言, 得证！

□

(3) 假设足球由 n 个六边形铺满,

$$V - E + F = 2n - 3n + n = 0 \neq 2,$$

矛盾！

(4)Let $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ be a continuous function with $f(0) = f(1) = 0$. Consider the simple closed curve C that consits of the graph of f and the line segment of the $x-$axis from $x = 0$ to $x = 1$.Prove: One can find four points on C that are the verticles of a square.

证明. f 在 $(0, 1)$ 上恒正或恒负, 否则不是简单闭曲线. 不妨设恒正.

设 $f(x)$ 在 $x_0 \in (0, 1)$ 处取到最大值, 最大值大于 0. 考虑 $g(x) = x + f(x)$,$g(0) = 0, g(1) = 1$, 由介值定理, 存在 $x_1 \in (0, 1)$ 使得 $g(x_1) = x_0$, 即 $x_1 + f(x_1) = x_0$.

考虑 $F(x) = f(x) - f(x + f(x)), x \in [0, 1]$.

$$F(x_0) = f(x_0) - f(x_0 + f(x_0)) \geqslant 0$$

$$F(x_1) = f(x_1) - f(x_0) \leqslant 0$$

因此存在 x_2 介于 x_0 与 x_1 之间也可能是 x_0 或 x_1 使得 $f(x_2) = f(x_2 + f(x_2))$. □

Chapter 1

拓扑空间与连续映射

1 度量空间

- 度量
  - 正定性
  - 对称性
  - 三角不等式

1.1 度量结构

- M.Frechet 在 1906 年在他的博士论文里引入度量结构
- Hausdorff 在 1912 年引入拓扑结构

定义

定义 1.1. 空间 X 上的一个度量 d 是一个函数

$$d : X \times X \to \mathbb{R}$$

满足:

(1) $d(x,y) \geqslant 0, d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

(2) $d(x,y) = d(y,x)$

(3) $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$

称 (X,d) 为度量空间.

注记. $d(x,y) \geqslant 0$ 事实上是多余的.

我们有 $d(x,x) = 0$, 然后用三角不等式 $d(x,x) \leqslant d(x,y) + d(y,x)$ 和交换性得到 $d(x,y) \geqslant 0$.

例子

例 1.2. (1) *(a)* $\mathbb{R}, d(x,y) = |x-y|$

(b) $\bar{d}(x,y) = \dfrac{|x-y|}{1+|x-y|}$

(c) $\bar{d}(x,y) = \inf\{|x-y|, 1\}$

(2) 离散度量 $d(x,y) = 1$

(3) *(a)* $d_2(x,y) = \sqrt{\sum (x_i - y_i)^2}$

(a) l^1 度量/出租车度量 $d_1(x,y) = \sum |x_i - y_i|$

(b) $d_\infty = \sup |x_i - y_i|$

(c) L^p 度量 $d_p(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p\right)^{1/p}$

(d) $d(x,y) = \begin{cases} |r_1 - r_2|, \theta_1 = \theta_2 \\ r_1 + r_2, \theta_1 \neq \theta_2 \end{cases}$

(4) $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} \times \cdots$

(a) $d((x_n),(y_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \bar{d}(x_n, y_n)$

注记. 因为无穷多个数相加, 要考虑收敛性, 因此考虑引入收敛因子 $\frac{1}{2^n}$, 还要保证 $d(x_n, y_n)$ 的有界性, 因此考虑用标准有界度量 $\bar{d}$

(b) $l_p(\mathbb{R} := \left\{(a_n) : \left(\sum |a_n|^p\right)^{1/p} < +\infty\right\})$

$$d_p((x_n),(y_n)) := ()$$

Hibert Cube

$$C = \prod_{n=1}^{\infty} [0, \frac{1}{n}] \subset l^2(\mathbb{R})$$

1. $C([a,b]) = \left\{f \in \mathbb{R}^{[a,b]} : fiscontinuous\right\}$

$$L^p - metric : d_p(f,g) = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}, p \in [1, +\infty]$$

2. $w^{k,p} on C([a,b])$ *(PDE)*

3. *wordmetric* 集合群论 *geometric group theory*

4. $\mathbb{Q}, p - adicmetric$ 代数集合

5. *Hausdorff* 度量 $d_H(A,B)$

注记. X^Y 表示 $\{f : Y \to X\}$

从旧的度量空间构造新的度量空间

(1) 从 X 我们可以得到它的子集 $Y \subset X$

$(X, d_X), Y \subset X$

$$d_Y := d_X\Big|_{Y\times Y}$$

(2) $X, Y \to X \times Y$

$(X_1, d_1), (X_2, d_2)$

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) := d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$$

(3) $X, Y \to X \cup Y$

有界性

为了在可列无穷多个度量空间 (X_n, d_n) 的笛卡尔积 $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ 上显示地构造积度量, 我们首先将 d_n 转换成一个有界度量.

定义 1.3. 设 (X, d) 是一个度量空间. 称 $A \subset X$ 是有界子集如果

$$\operatorname{diam}(A) := \sup_{x,y\in A} d(x, y) < +\infty.$$

此时我们称 $\operatorname{diam}(A)$ 是 A 在 (X, d) 中的直径. 如果 $A = X$, 我们称 d 是 X 上的一个有界度量, 或者说 (X, d) 是一个有界度量空间.

事实上, 给定 X 上的任意度量 d, 我们都能构造出 X 上的两个有界度量如下:

$$\bar{d}_1(x, y) = \min\{d(x, y), 1\}, \bar{d}_2(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}.$$

$\bar{d}_2$ 确实是 X 上的度量是下面命题的推论.

命题 1.4. 设 (X, d) 是一个度量空间. 设 $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ 满足

- 严格单调递增;
- $f(0) = 0$;
- $f(\alpha + \beta) \leqslant f(\alpha) + f(\beta), \forall \alpha, \beta \in [0, +\infty)$

那么 $\tilde{d}(x, y) := d(x, y)$ 是 X 上的一个度量.

令 $f(x) = \dfrac{x}{1 + x}$, 容易验证

- $f(x)$ 严格单调递增
- $$\frac{x + y}{1 + x + y} \leqslant \frac{x}{1 + x} + \frac{y}{1 + y}$$
  $$(1 + x)(1 + y)(x + y) \leqslant x(1 + x + y)(1 + y) + y(1 + x + y)(1 + x)$$
  $$(1 + x + y + xy)(x + y) \leqslant (1 + x + y)(x + y + 2xy)$$
  $$xy(x + y) \leqslant 2xy(1 + x + y)$$
  $$0 \leqslant xy(2 + x + y)$$

球、球面以及开集

同构、嵌入以及李普希茨映射

收敛和连续

对于度量空间间的映射, 我们不难定义连续性：我们可以先像欧式空间中一样定义点列收敛的概念, 然后再通过收敛定义连续.

定义 1.5. 设 (X,d) 是一个度量空间. 我们称点列 x_i（关于度量 d）收敛到点 $x_0 \in X$ 如果对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 N 使得对任意的 $i > N$, 成立 $d(x_i,x_0) < \varepsilon$. 此时我们记 $x_n \xrightarrow{d} x_0$.

定义 1.6 (连续映射)**.** 设 $(X,d_X),(Y,d_Y)$ 是两个度量空间.

(1) 称一个映射 $f : X \to Y$ 在点 $x_0 \in X$ 处连续如果对任意点列 x_i 收敛到 x 成立 $f(x_i)$ 收敛到 $f(x_0) \in Y$.

(2) 称 f 是连续映射如果 f 在任意 $x_0 \in X$ 处连续.

命题 1.7. 设 $f : (X,d_X) \to (Y,d_Y)$,$x_0 \in X$, 则下列叙述等价：

(1) f 在 x_0 处连续

(2) 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对任意 $x \in X$, 只要满足 $d_X(x,x_0) < \delta$, 便成立 $d_Y(f(x),f(x_0)) < \varepsilon$

(3) 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得 $f(B(x_0,\delta)) \subset B(f(x_0,\varepsilon))$

(4) 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得 $B(x_0,\delta) \subset f^{-1}\left(B(f(x_0),\varepsilon)\right)$

连续映射的例子

强等价度量

注意到作为上一个例子的结果, 任意映射 $f : (\mathbb{R},d_{discrete},\mathbb{R},d)$ 是连续映射, 而我们已经在数学分析中见到,“大部分”映射 $f : (\mathbb{R},d) \to (\mathbb{R},d)$ 不是连续的. 所以一个映射是否连续确实依赖于给定的度量, 所以当我们有不同的度量时比较连续映射的集合是一个自然的问题.

有一些简单的例子说明在某些特定的情况下,“连续性”不是那么依赖于度量

例 1.8. 内容...

如果我们回顾上面的例子, 我们容易发现关于 d_1 和 d_2 的连续性等价的主要原因是事实

$$\frac{1}{n}d_1(x,y) \leqslant d_2(x,y) \leqslant \sqrt{n}d_1(x,y).$$

定义 1.9 (强等价度量)**.** 设 d_1 和 d_2 是集合 X 上的两个度量. 我们称 d_1 和 d_2 是强等价的如果存在常数 $C_1,C_2 > 0$ 使得

$$C_1d_1(x,y) \leqslant d_2(x,y) \leqslant C_2d_1(x,y), \quad \forall x,y \in X.$$

通过重复例子中的论证, 我们能够证明强等价度量诱导相同的连续性的概念：

命题 1.10. 设 d_X 和 $\tilde{d}_X$ 是 X 上的强等价度量,d_Y 和 $\tilde{d}_Y$ 是 Y 上的强等价度量. 那么映射 $f : (X,d_X) \to (Y,d_Y)$ 是连续的当且仅当 $f : (X,\tilde{d}_X) \to (Y,\tilde{d}_Y)$ 是连续的.

1.2 度量空间之间的连续映射

- 保持度量结构的映射
-

定义 1.11. 我们称 $f:(X,d_X)\to(Y,d_Y)$ 是一个等距映射 *isometry* 如果 f 是一个双射而且

$$d_X(x,y)=d_Y(f(x),f(y))$$

注记. 这实际上告诉我们这两个度量空间是相同的空间；从分类上来讲这是很强的一个分类.

定义 1.12. 我们称 $f:(X,d_X)\to(Y,d_Y)$ 是一个嵌入 *embedding* 如果 f 是一个单射而且

$$d_X(x,y)=d_Y(f(x),f(y))$$

定义 1.13. 我们称 $f:(X,d_X)\to(Y,d_Y)$ 是一个 *Lipschitz* 映射（其 *Lipschitz* 常数为 L）如果

$$d_Y(f(x),f(y))\leqslant Ld_X(x,y)$$

$f:(X,d_X)\to(Y,d_Y)$

定义 1.14. (X,d_X) 是度量空间, 我们称 x_n 关于度量 d_X 收敛到 x_0 任意 $\varepsilon>0$, 存在 N 使得对于任意的 $n>N$,$d(x_n,x_0)<\varepsilon$, 记作 $x_n\xrightarrow{d_X}x_0$

定义 1.15. 我们称 $U\subset(X,d_X)$ 是开的如果对任意的 $x\in U$, 存在 $\varepsilon>0$, 使得 $B(x,\varepsilon)\subset U$

定义 1.16. 我们称 $f:(X,d_X)\to(Y,d_Y)$ 在点 x_0 处是连续的如果对于任意点列 $x_n\xrightarrow{d_X}x_0$, 我们有 $f(x_n)\xrightarrow{d_Y}y_0=f(x_0)$

称 f 是连续映射如果 f 处处连续.

例 1.17. (X,d_X), 固定点 x_0, 考虑映射 $d_{x_0}:X\to\mathbb{R},x\mapsto d(x,x_0)$ 是连续的.

证明.

$$|d_{x_0}(x)-d_{x_0}(y)|\leqslant d(x,y)$$

□

注记. 这实际上是一个 *Lipschitz* 映射,

注记. “d 是连续的”

(1) 对任意的 x_0,$d_{x_0}:X\to\mathbb{R}$ 是连续的

(2) $d:X\times X\to\mathbb{R}$ 是连续函数.

例 1.18.

$$\int:C([a,b])\to\mathbb{R}$$

$$f\mapsto\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

关于 $C([a,b])$ 上的度量 $d(f,g)=\sup\limits_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|$ 是连续的

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant(b-a)d(f,g)$$

例 1.19. $X(,discrete),(Y,d_Y)$ 任意 f 是连续映射

注记. $f:(X,d_X)\to(Y,d_Y)$ 在 x_0 处连续 $\Leftrightarrow$ 任意 $\varepsilon>0$ 存在 $\delta>0$ 使得任意 $d_X(x,x_0)<\delta$ 就有 $d_Y(f(x),f(x_0))<\varepsilon$

例 1.20. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

事实上,f 关于 l^1 度量连续当且仅当 f 关于 l^2 度量连续

事实上,$|x-y|_{l_1}|x-y|_{l_2}$

定义 1.21. 我们称 X 上的两个度量 d_1,d_2 是强等价的如果存在 C_1,C_2 使得

$$C_1d_2(x_1,x_2)\leqslant d_1(x_1,x_2)\leqslant C_2d_2(x_1,x_2)$$

如果 d_1,d_2 是强等价的, 那么 $f:(X,d_1)\to(Y\to d_2)$ 连续当且仅当 $f(X,d_2)\to(Y,d_Y)$ 连续.

注记. 强等价本质上是说恒等映射是一个李普希茨映射.

命题 1.22. 强等价 $\Rightarrow$ 生成的连续函数是一样的

收敛性和连续性

连续映射的例子

强等价度量

更多诱导相同连续概念的度量

利用邻域刻画局部连续性

利用开集刻画全局连续性

一个非拓扑概念：一致连续

f 关于 d_2 是连续的当且仅当 f 关于 $\bar{d}_2$ 连续

注记. $d_2,\bar{d}_2$ 不是强等价的.

证明. 因为 $\bar{d}_2\leqslant d_2$,f 关于 d_2 连续, 按定义, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得 $d_2(x,x_0)<\delta\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

如果 $d_2(x,x_0)$, 则 $\bar{d}_2(x,x_0)<\delta$, 如果 f 关于 $\bar{d}_2$ 连续, 则 f 关于 d_2 连续.

相反地, 如果 f 关于 d_2 连续,

$$\bar{d}_2(x,y)\frac{\delta}{1+\delta}\Rightarrow d_2(x,y)<\delta\Rightarrow$$

□

注记. 这些例子是在告诉我们连续性背后应该是比度量更加基本的概念.

locally continuity via neighborhood

把一个点邻近的点映到另一个点邻近的点.

定义 1.23. 集合 $N \subset (X, d_r)s$ 是点 x 的邻域是指存在开集 U 使得 $x \in U \subset N$.

注记. 我们不要求 N 是开的.

记 $\mathcal{N}(x) = \{N|N \text{ is a neightborhood of x}\} \subset \mathcal{P}(X)$.
容易看到,

$(N1)$ $N \in \mathcal{N}(x) \Rightarrow x \in N$

$(N2)$ $N \in \mathcal{N}(x), M > N \Rightarrow M \subset \mathcal{N}(x)$

$(N3)$ $N_1, N_2 \in \mathcal{N}(x) \Rightarrow N_1 \cap N_2 \in \mathcal{N}(x)$

$(N4)$ $N \in \mathcal{N}(x)\Rightarrow$ 存在 $M \in \mathcal{N}(x)$ 使得任意 $y \in M$,$N \in \mathcal{N}(y)$

命题 1.24. f 是连续的在点 x_0 当且仅当任意 $f(x_0)$ 邻域 M,$f^{-1}(M)$ 是 x_0 的一个邻域.

证明. f 在 x_0 连续,M 是 $f(x_0)$ 的邻域, 存在开集 $V \subset Y$ 使得 $f(x_0) \in V \subset M$, 存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $f(x_0) \in B(f(x_0), \varepsilon) \subset V \subset N$

$B_X(x_0, \delta) \subset f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon)) \subset f^{-1}(V) \subset f^{-1}(M)$
$f^{-1}(M)$ 是 x_0 的邻域.
反过来, 取 $M = B(f(x_0), \varepsilon)$,
$f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon)) \subset U \in x_0$

$$B_X(x_0, \delta) \subset f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon))$$

□

整体连续性

定理 1.25. $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ 是连续的当且仅当任意开集 $V \subset Y$, 它的原像 $f^{-1}(V)$ 在 X 中是开集.

注记. 在一点连续时我们不能说开集的原像是开集, 只能说邻域的原像是邻域

证明. f 连续,$V \subset Y$ 是开集,$x_0 \in f^{-1}(V)$,$f(x_0) \in V$,f 在 x_0 也连续,$f^{-1}(V)$ 是 x_0 的一个邻域, 那就有一个 $\delta > 0$ 使得 $B(x_0, \delta) \subset f^{-1}(V)$, 因此 $f^{-1}(V)$ 是开集.

开集的原像是开集, 证连续. 任取 $x_0 \in X$, 任意 $\varepsilon > 0$, 需要找到一个 $\delta > 0$, 使得 $B(x_0, \delta) \subset f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon))$ □

定义 1.26. 两个度量 $d_X, \tilde{d}_X$ 是拓扑等价的, 如果 d_X 定义出来的开集的集合等于 $\tilde{d}_X$ 定义出来的开集.

注记. 强等价的度量一定拓扑等价; 拓扑等价不一定强等价.

推论 1.27. 如果 $\tilde{d}_X$ 与 d_X 是拓扑等价的,$\tilde{d}_X$ 与 d_X 是拓扑等价的, 那么 $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ 是连续的当且仅当 $f : (X, \tilde{d}_X) \to (Y, \tilde{d}_Y)$ 是连续的.

例 1.28. 连续性只依赖于开集, 它是拓扑概念; 但一致连续不是拓扑概念.

定义 1.29. $f(X, d_X) \to (Y, d_Y)$ 是一致连续的如果对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 只要 $d_X(x_1, x_2) < \delta$, 就有 $d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$

例 1.30. $\mathbb{R}$, 考虑 $d(x, y) = |x - y|$,$d_{\text{arctan}}(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$

注记. 用到讲义里单调次可加函数诱导的度量也是度量

它们两个是拓扑等价的.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = x.$

$f(\mathbb{R}, d) \to (\mathbb{R}, d)$ 是一致连续的.

$f(\mathbb{R}, d_{\text{arctan}}) \to (\mathbb{R}, d)$ 不是一致连续的.

因为 $|\arctan n - \arctan(n+1)| \to 0$ 但 $|n - (n+1)|$

2 PSet01-2

(1)A pseudo-metric on a set X is a map $d : X \to X \to [0, +\infty)$ that satisfies

- $d(x, x) = 0$
- $d(x, y) = d(y, x)$
- $d(x, y) + d(y, z) \geqslant d(x, z)$

Let (X, d) be a pseudo-metric space.Define an equivalence relation on X via

$$x \sim y \Longleftrightarrow d(x, y) = 0.$$

Let $\overline{X} = X/\sim$ be the quotient,and let $p : X \to \overline{X}$ be the quotient map.Prove:there is an unique metric $\bar{d}$ on $\overline{X}$ so that

$$d(x, y) = \bar{d}(p(x), p(y)).$$

证明.

$$\bar{d}(p(x), p(y)) := d(x, y)$$

- 良定性. 若 $x_1 \sim x_2$, 则 $d(x_1, y) \leqslant d(x_1, x_2) + d(x_2, y)$, 同理有 $d(x_2, y) \leqslant d(x_1, y)$, 因此 $d(x_1, y) = d(x_2, y)$.
- $\bar{d}$ 是度量.
  - 正定性.$\bar{d}(p(x), p(y)) = 0 \Rightarrow d(x, y) = 0 \Rightarrow p(x) = p(y)$
  - 对称性和三角不等式都继承自 d.
- 唯一性. 只要两个度量在每两个点间给出的值相同那它们便是同一个度量, 唯一性显然.

$\square$

(2)Let (X, d_X) and (Y, d_Y) be metric spaces. Construct a “reasonable” metric on $X \cup Y$.

解.

(a) $X \cap Y = \varnothing$ 固定 $x_0 \in X, y_0 \in Y$, 对任意 $x, x_1, x_2 \in X, y, y_1, y_2 \in Y$

$$d(x,y) = d(y,x) := d_X(x,x_0) + 1 + d_Y(y_0,y), d(x_1,x_2) := d_X(x_1,x_2), d(y_1,y_2) := d_Y(y_1,y_2)$$

- 正定性与对称性显然.
- 三角不等式. 不妨设 $z \in X$,、

$$d(x,y) = d_X(x,x_0)+1+d_Y(y_0,y) \leqslant d_X(x,z)+d_X(z,x_0)+1+d_Y(y_0,y) = d(x,z)+d(z,y)$$

(b) $X \cap Y = \{a\}$

$$d(x,y) = d(y,x) = d_X(x,a) + d_Y(y,a)$$

只验证三角不等式, 不妨设 $z \in X$, 则

$$d(x,y) = d_X(x,a) + d_Y(y,a) \leqslant d_X(x,z) + d_X(z,a) + d_Y(y,a) = d(x,z) + d(z,y)$$

其余情形平凡或可类似验证.

(c) $X \cap Y$ 含有超过一个元素但是在 $X \cap Y$ 上 $d_X = d_Y$

记 $A = X \backslash Y$,$B = X \cup Y$,$C = Y \backslash X$, 我们唯一要做的事只是定义 A 中一点与 C 中一点之间的度量.

我不知道该怎样定义, 但我知道它至少要满足三角不等式, 我现在先不要求所有的点的组合都满足三角不等式, 而是考虑第三个点为 B 中的点时一定要满足三角不等式, 也就是说, 对任意取定的 $x \in A, y \in C$, 必须成立

$$d(x,y) \leqslant d_X(x,z) + d_Y(y,z), \forall z \in B$$

显然满足该式成立的最大的 $d(x,y)$ 的值为 $\inf\limits_{z \in B}(d_X(x,z) + d_Y(y,z))$, 我们就将其定义为 $d(x,y)$ 的值, 接下来验证满足度量的三条要求.

- 正定性失败!
- 对称性显然.
- – $x \in A, y \in A, z \in C$. 设 $a, b \in B$,

$$\begin{aligned} d(x,y) &\leqslant d_X(x,a) + d_X(a,b) + d_X(b,y) \\ &\leqslant d_X(x,a) + d_Y(a,z) + d_Y(b,z) + d_X(b,y) \end{aligned}$$

由 a, b 的任意性, 得

$$d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(y,z)$$

- $x \in A, y \in C, z \in A$

$$d_X(x,a) \leqslant d_X(x,z) + d_X(z,a)$$

$$d(x,y) \leqslant d_X(x,a) + d_Y(a,y) \leqslant d_X(x,z) + d_X(z,a) + d_Y(a,y)$$

  右侧关于 a 取下确界得到

$$d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$$

- 其余情形平凡或可类似验证

实际上我们构造出了一个 pseudo-metric, 可以考虑按第 (1) 题的操作在 $X \cup Y$ 上定义一个等价类后在商集上定义度量. 事实上, 将 $d(x,y)=0$ 的 x,y 看作同一点是较为自然的, 因为容易证明我们可以找出一列点 $z_n \in B$ 使得它们按 d_X 收敛于 x 的同时按 d_Y 收敛于 y.

$\square$

(3)Let (X,d) be a metric space,For any subset $A\subset X$,define

$$d_A : X \to [0,+\infty), x \mapsto d_A(x) = \inf_{a\in A} d(x,a).$$

Prove:

(a) d_A is continuous function on X.

(b) A is closed if and only if $d_A(x)=0$ implies $x\in A$

(c) (Urysohn's lemma for metric spaces) If A and B are closed subsets in (X,d) and $A\cap B=\varnothing$.Then there exists a continuous function $f : X\to[0,1]$ such that

$$f\equiv 0 \text{ on } \quad A, \qquad \text{and} \qquad f\equiv 1 \text{ on } \quad B.$$

证明.

(a)

$$d_A(x)\leqslant d(x,a)\leqslant d(y,a)+d(x,y), \forall\ a\in A.$$

右侧对 a 取下确界, 得到

$$d_A(x)-d_A(y)\leqslant d(x,y).$$

因此 $d_A(x)$ 是连续函数.

(b)

$$\begin{aligned}
&A\text{是闭集}\\
\Longleftrightarrow &A^c\text{是开集}\\
\Longleftrightarrow &\forall\ x\in A^c, \exists\ \varepsilon>0, s.t. B(x,\varepsilon)\subset A^c\\
\Longleftrightarrow &\forall\ x\in A^c, \exists\ \varepsilon>0, s.t. d_A(x)\geqslant\varepsilon
\end{aligned}$$

若 $d_A(x)=0$, 则 $x\notin A^c$, 则 $x\in A$.

$$\begin{aligned}
&\text{假设}A\text{不是闭集}\\
\Longleftrightarrow &A^c\text{不是开集}\\
\Longleftrightarrow &\exists\ x\in A^c, \forall\ \varepsilon>0, B(x,\varepsilon)\cap A\neq\varnothing\\
\Longleftrightarrow &\exists\ x\in A^c, d_A(x)=0
\end{aligned}$$

这与 $d_A(x)=0\Rightarrow x\in A$ 矛盾！因此 A 是闭集.

(c)

$$f(x)=\frac{d_A(x)}{d_A(x)+d_B(x)}.$$

□

4.Let $f_n : (X, d_X) \to (Y, d_Y)(n \in \mathbb{N})$ and $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ be maps.

(a) Define "uniform convergence": f_n converges uniformly to f on X if ...

(b) Suppose f_n are continuous,and converges to f uniformly.Prove: f is continuous.

(c) On the set $Y^X = \{f : X \to Y | f \text{ is any map}\}$,define

$$\bar{d}(f, g) := \sup_{x \in X} \frac{d_Y(f(x), g(x))}{1 + d_Y(f(x), g(x))}.$$

(i) Prove: $\bar{d}$ is a metric on Y^X.

(ii) Prove: f_n converges to f uniformly if and only if as elements in the metric space $(Y^X, \bar{d})$, f_n converges to f.

证明.

(a) 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 只要 $n > N$, 对任意的 $x \in X$, 成立

$$d_Y(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

(b) 要证, 对固定的 $x_0 \in X$, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 只要 $d_X(x, x_0) < \delta$, 便成立 $d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

对相同的 ε, 按照一致收敛的定义, 存在 N_ε, 只要 $n > N_\varepsilon$, 对任意的 $x \in X$, 成立 $d_Y(f_n(x), f(x)) < \dfrac{\varepsilon}{3}$

选定一个 $n > N_\varepsilon$, 由于 f_n 是连续函数, 所以对上面的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 只要 $d_X(x, x_0) < \delta$, 便成立 $d_Y(f(x), f(x_0)) < \dfrac{\varepsilon}{3}$

因此对于 x 满足 $d_X(x, x_0) < \delta$, 成立

$$d_Y(f(x), f(x_0)) < d_Y(f(x), f_n(x)) + d_Y(f_n(x), f_n(x_0)) + d_Y(f_n(x_0), f(x_0)) < \varepsilon$$

(c) (i)
- 正定性.

$$\bar{d}(f, f) = \sup_{x \in X} \frac{d_Y(f(x), f(x))}{1 + d_Y(f(x), f(x))} = 0$$

若 $f \neq g$, 则存在 x_0 使得 $f(x_0) \neq g(x_0)$, 则

$$\bar{d}(f, g) \geqslant \frac{d_Y(f(x_0), g(x_0))}{1 + d_Y(f(x_0), g(x_0))} > 0.$$

- 对称性. 显然.
- 三角不等式.

$$\begin{aligned} \frac{d_Y(f(x), g(x))}{1 + d_Y(f(x), g(x))} &\leqslant \frac{d_Y(f(x) + h(x)) + d_Y(h(x) + g(x))}{1 + d_Y(f(x) + h(x)) + d_Y(h(x) + g(x))} \\ &\leqslant \frac{d_Y(f(x) + h(x))}{1 + d_Y(f(x) + h(x))} + \frac{d_Y(h(x) + g(x))}{1 + d_Y(h(x) + g(x))} \\ &\leqslant \bar{d}(f, h) + \bar{d}(h, g) \end{aligned}$$

左侧关于 x 取上确界, 得

$$\bar{d}(f, g) \leqslant \bar{d}(f, h) + \bar{d}(h, g).$$

(ii) 当 f_n 一致收敛到 f, 按定义, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 只要 $n > N$, 对任意的 $x \in X$, 成立

$$d_Y(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

因此

$$\frac{d_Y(f_n(x), f(x))}{1 + d_Y(f_n(x), f(x))} < \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \to 0, \forall x \in X$$

当 f_n 按度量 $\bar{d}$ 收敛到 f, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 只要 $n > N$, 对任意的 $x \in X$, 成立

$$\frac{d_Y(f_n(x), f(x))}{1 + d_Y(f_n(x), f(x))} < \varepsilon$$

$$d_Y(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \to 0, \forall x \in X$$

□

3 拓扑空间：定义与基本例子

3.1 拓扑空间的定义

通过邻域结构定义拓扑

为了将连续性和收敛性的概念推广到更一般的空间, 直觉上我们首先需要公理化“邻域”的概念.

对于任意 $x \in X$, 我们能够给它指派一个非空的子集族,

$$x \mapsto \mathscr{N}(x) \subset \mathcal{P}(X),$$

将 $\mathscr{N}(x)$ 中的每个元素理解为 x 的一个邻域.$\mathscr{N}(x)$ 需要满足下列公理：

(N1) 如果 $N \in \mathscr{N}(x)$, 那么 $x \in N$.

(N2) 如果 $M \supset N$ 且 $N \in \mathscr{N}()$, 那么 $M \in \mathscr{N}(x)$.

(N3) 如果 $N_1, N_2 \in \mathscr{N}(x)$, 那么 $N_1 \cap N_2 \in \mathscr{N}(x)$.

(N4) 如果 $N \in \mathscr{N}(x)$, 那么 $\exists\, M \subset N$ 且 $M \in \mathscr{N}(x)$ 使得 $\forall\, y \in M$, 有 $N \in \mathscr{N}(y)$.

注记.

(1) *关于邻域的前三条公理有清晰的含义. 第四条, 给出了不同点之间的邻域的关系, 可以被视作度量结构中三角不等式的替代.*

(2) *这样的结构最初是由 Hausdorff 在 1912 年引入的. 他的目标是定义一个非常广泛的空间的概念, 包含 $\mathbb{R}^n$、Riemann 面、无穷维空间以及由曲线或函数组成的空间. 他给出了引入这样一般的概念的两个好处：简化理论, 防止我们不合法地利用直觉.*

定义 3.1. *集合 X 上的一个邻域结构 $\mathscr{N}$ 是一个映射*

$$\mathscr{N} : X \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)) \backslash \varnothing$$

并且满足公理 (N1) – (N4).

通过内部结构定义拓扑

定义 3.2 (Hausdorff,1912)**.** 一个邻域结构是一个映射

$$\mathcal{N} : X \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(x)), x \mapsto \mathcal{N}(x)$$

使得 $(N1) - (N4)$ 成立.

定义 3.3. $\mathrm{Int}(A) := \{x \in A | A \in \mathcal{N}(x)\}$

我们能够验证

$(I1)$ $\mathrm{Int}(A) \subset A$

$(I2)$ $\mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B) = \mathrm{Int}(A \cap B)$

$(I3)$ $\mathrm{Int}(\mathrm{Int}(A)) = \mathrm{Int}(A)$

$(I4)$ $\mathrm{Int}(X) = X$

定义 3.4. $\mathcal{I} : P(X) \to \mathcal{P}(x)$ 满足 $(I1) - (I4)$

当我们有了 $(X,\mathcal{N})$ 或 $(X,\mathcal{I})$,

定义 3.5. U 是开集当且仅当 $U = \mathrm{Int}(U)$

设 $\mathcal{T} = \{\text{open sets }\} \subset \mathcal{P}(X)$ 满足

$(O1)$ $\varnothing, X \in \mathcal{T}$

$(O2)$ $U_1, U_2 \in \mathcal{T} \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$

$(O3)$ $U_\alpha \in \mathcal{T} \Rightarrow \cup_\alpha U_\alpha \in \mathcal{T}$

定义 3.6. X 上的一个拓扑结构 $\mathcal{T}$

等价地, 闭集, 一个集合是闭集当且仅当它的补集是开集.

$(C1)$ $X, \varnothing \in \mathcal{F}$

$(C2)$ $F_1, F_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$

$(C3)$

通过开集定义拓扑

通过闭集定义拓扑

3.2 拓扑空间举例

例 3.7. 下面我们给出一些拓扑的例子.

(1) 平凡拓扑.

$$\mathcal{T}_{trivial}=\{\varnothing,X\}$$

(2) 离散拓扑.

$$\mathcal{T}_{discrete}=\mathcal{P}(X)=\mathcal{T}_{d_{discrete}}$$

(3) 度量拓扑.(X,d)

$$\mathcal{T}_d=\left\{U\middle|\forall x\in U,\exists r>0s.t.B(x,r)\subset U\right\}$$

(4) 余有限拓扑.X,

$$\mathcal{T}_{confinite}=\left\{U\subset X\middle|U=\varnothing orU^c\ is\ finite\right\}$$

(5) 余可数拓扑.X

$$\mathcal{T}_{cocountable}=\left\{U\subset X\middle|U=\varnothing orU^c\ is\ countalbe\right\}$$

(6) *Zariski* 拓扑.$\mathbb{C}^n$,$R=\mathbb{C}^n[z_1,\cdots,z_n]$

$$\mathcal{T}_{zariski}=\{U|\exists f_1,\cdots,f_m\in Rs.t.U^c=commonzeroof f_1,\cdots,f_n\}$$

(7) $\mathbb{R}$

$$\mathcal{T}_{sorgenfrey}=\left\{U\middle|\forall x\in U,\exists\varepsilon>0s.t.[x,x+\varepsilon)\subset U\right\}$$

(8) 左右连续上半连续下半连续都是某个拓扑下的连续

定义 3.8. 如果 $\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2$ 是 X 上的拓扑, 我们称 T_1 强于或精细于 T_2 或 T_2 弱于或粗糙于如果 $\mathcal{T}_1\subset\mathcal{T}_2$

注记. 上面定义了一个偏序关系, 但不是一个全序关系.

$$\mathcal{T}_{trivial}\subset\mathcal{T}\subset\mathcal{T}_{discrete}$$

3.3 从已有的拓扑空间构造新空间

子空间拓扑

设 X 是拓扑空间,$Y \subset X$ 是子集, 定义

$$\mathscr{T}_Y = \{V \subset Y \mid \exists\, U \in \mathscr{T}_X \text{ s.t. } V = U \cap Y\},$$

容易验证 $\mathscr{T}_Y$ 构成 Y 上一个拓扑, 称为（Y 继承 X 的）子空间拓扑.

设 $A \subset B \subset X$, 按定义容易验证 A 直接继承 X 的子空间拓扑与 B 先继承 X 的子空间拓扑,A 再继承 B 的子空间拓扑的结果是一致的.

并集上的拓扑

两个拓扑空间, 考虑 $X \cup Y$,

$$\mathcal{T}_{X\cup Y} = \{U | \exists U_1 \in \mathcal{T}_X, U_2 \in \mathcal{T}_Y s.t. U = U_1 \cup U_2\}$$

乘积拓扑

例 3.9. $X \times Y$, 定义乘积拓扑

$$\mathcal{T}_{X\times Y} = \left\{W \subset X \times Y \middle| \forall (x,y) \in W, \exists x \in U \in \mathcal{T}_X, y \in V \in \mathcal{V}_y s.t. U \times V \subset W\right\}$$

注记. 对于 $\mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{T}_{d_1} = \mathcal{T}_{d_2} = \mathcal{T}_{d_\infty} = \lceil_{\surd} = \mathcal{T}_{product}$$

注记. $\prod\limits_{\alpha} X_\alpha$ 上的乘积拓扑有不同的定义方式.

4 PSet02-1

(1)Let (X, d_X) and (Y, d_Y) be metric spaces.Endow the product space $X \times Y$ with the metric

$$d_{X\times Y}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2).$$

Prove:

(a) If U is open in (X, d_X),V is open in (Y, d_Y), then $U \times V$ is open in $(X \times Y, d_{X\times Y})$.

(b) W is an open set in $(X \times Y, d_{X\times Y})$ if and only if for any $(x, y) \in W$, there exists $r > 0$ such that $B(x, r) \times B(y, r) \subset W$.

证明. (a)

因为 U, V 分别是 (X, d_X) 与 (Y, d_Y) 中的开集, 因此对任意 $x \in U$, 存在 $r_x > 0$ 使得 $B(x, r_x) \subset U$；对任意 $y \in V$, 存在 $r_y > 0$ 使得 $B(y, r_y) \subset V$.

按 $d_{X\times Y}$ 的定义显然有

$$B(x, r_x) \times B(y, r_y) \subset B((x, y), r_x + r_y).$$

但不一定有

$$B((x, y), r_x + r_y) \subset U \times V.$$

为此, 取 $\delta > 0$ 使得

$$\frac{r_x + r_y}{\delta} < \min\{r_x, r_y\}.$$

则 $x \in B(x, \frac{r_x}{\delta}) \subset U, y \in B(y, \frac{r_y}{\delta}) \subset V$, 并且

$$(x, y) \in B(x, \frac{r_x}{\delta}) \times B(y, \frac{r_y}{\delta}) \subset B((x, y), \frac{r_x + r_y}{\delta}) \subset U \times V$$

(b) 如果 W 是 $(X \times Y, d_{X\times Y})$ 中开集, 那么存在 $2r > 0$, 使得

$$B((x, y), 2r) \subset W$$

显然

$$B(x, r) \times B(y, r) \subset B((x, y), 2r) \subset W.$$

如果对任意 $(x, y) \in W$, 存在 $r > 0$ 使得

$$B(x, r) \times B(y, r) \subset W,$$

则

$$(x, y) \in B(x, \frac{r}{2}) \times B(y, \frac{r}{2}) \subset B((x, y), r) \subset B(x, r) \times B(y, r) \subset W.$$

因此 W 是开集.

$\square$

(2)[Furstenberg's topological proof of the infinitude of primes]

For any $a, b \in \mathbb{Z}$ with $b > 0$ we define

$$N_{a,b} := \{a + nb | n \in \mathbb{Z}\}.$$

Define a topology on $\mathbb{Z}$ by

$$\mathscr{T}_{Furs} = \{U \subset \mathbb{Z} | \text{either } U = \varnothing, \text{or } \forall a \in U, \exists b \in \mathbb{Z}_{>0} \text{ s.t.} N_{a,b} \subset U\}.$$

(a) Prove:$\mathscr{T}_{Furs}$ is a topology on $\mathbb{Z}$.

(b) Prove:Each $N_{a,b}$ is open.

(c) Prove:Each $N_{a,b}$ is closed.

(d) Let $\mathscr{P} = \{2, 3, \cdots\}$ be the set of all prime numbers.Prove:

$$\mathbb{Z} \backslash \{1, -1\} = \bigcup_{p \in \mathscr{P}} N_{0,p}.$$

(e) Conclude that $\mathscr{P}$ is not a finite set.

证明.

(a)
- 按定义显然 $\varnothing, \mathbb{Z} \in \mathscr{T}_{Furs}$
- 若 $U_\alpha \in \mathscr{T}_{Furs}, \alpha \in A$, 则对任意 $a \in \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$, 存在 $\alpha \in A$ 使得 $a \in U_\alpha$, 按定义存在 $b \in \mathbb{Z}_{>0}$ 使得 $N_{a,b} \subset U_\alpha \subset \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$
- 只证若 $U_1, U_2 \in \mathscr{T}_{Furs}$, 则 $U_1 \cap U_2 \in \mathscr{T}_{Furs}$. 有限个的情况容易由数学归纳法得出.
  设 $a \in U_1 \cap U_2$, 则存在 $b_1, b_2 \in \mathbb{Z}_{>0}$ 使得 $N_{a,b_1} \subset U_1, N_{a,b_2} \subset U_2$, 则 $N_{a,b_1 b_2} \subset U_1 \cap U_2$.

(b) 因为 $N_{a,b} = N_{a+nb,b}$, 所以 $N_{a,b}$ 是开集.

(c) 因为 $N_{a,b} = \mathbb{Z} \backslash \bigcup\limits_{i=1}^{b-1} N_{a+i,b}$ 是开集的补集, 所以 $N_{a,b}$ 是闭集.

(d) 等价于证明任意 $a \in \mathbb{Z} \backslash \{1, -1\}$, 都可以被写为 $a = np, p \in \mathscr{P}$ 的形式, 由素因数分解定理, 这是显然的.

(e) 假如 $\mathscr{P}$ 是有限集, 则由上一问 $\{1, -1\}$ 是有限个闭集的并, 从而 $\{1, -1\}$ 是开集, 这是不可能的, 因此 $\mathscr{P}$ 是无限集.

$\square$

(3)Define a function $d : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ by

$$d(a, b) = \begin{cases} 0, & a = b \\ 2^{-\tau(a-b)}, & a \neq b, \end{cases}$$

where $\tau(a - b)$ is the smallest positive integer that does not divide a-b.

(a) Prove:d is a metric on $\mathbb{Z}$.

(b) Describe the metric balls $B(a,r)$.

(c) Show that the metric topology generated by d is the topology $\mathscr{T}_{Furs}$ above.

证明.

(a)
- 正定性与对称性显然.
- 三角不等式. 当 x,y,z 有任意两个点相同时显然. 不妨设 x,y,z 两两不等, 要证

$$2^{-\tau(x-y)} \leqslant 2^{-\tau(x-z)} + 2^{-\tau(z-y)}.$$

记 $x-z=m, z-y=n$, 则转化为证 $2^{-\tau(m+n)} \leqslant 2^{-\tau(m)} + 2^{-\tau(n)}$.
不妨设 $\tau(m) \leqslant \tau(n)$, 即 $1,2,\cdots,\tau(m)-1$ 都整除 n, 因此 $1,2,\cdots,\tau(m)-1$ 都整除 n 也都整除 $m+n$, 因此 $\tau(m) \leqslant \tau(m+n)$, 则 $2^{-\tau(m+n)} \leqslant 2^{-\tau(m)} < 2^{-\tau(m)} + 2^{-\tau(n)}$.

(b) $B(a,r) = \displaystyle\bigcap_{1 \leqslant n \leqslant \lfloor -\log_2 r \rfloor} N_{a,n}$

(c)
- $\mathscr{T}_d \subset \mathscr{T}_{Furs}$. 任取 $U \in \mathscr{T}_d$, 对任意 $a \in U$, 存在 $r > 0$ 使得 $B(a,r) \subset U$, 只需注意

$$N_{a,m} \subset \bigcap_{1 \leqslant n \leqslant \lfloor -\log_2 r \rfloor} N_{a,n}$$

其中 m 是满足 $1 \leqslant n \leqslant \lfloor -\log_2 r \rfloor$ 的所有 n 的最小公倍数. 因此 $U \in \mathscr{T}_{Furs}$.
- $\mathscr{T}_{Furs} \subset \mathscr{T}_d$. 任取 $U \in \mathscr{T}_{Furs}$, 对任意 $a \in U$, 存在 m 使得 $N_{a,m} \subset U$, 取 r 充分小使得 $\lfloor -\log_2 r \rfloor \geqslant m$, 则 $B(a,r) \subset U$, 从而 $U \in \mathscr{T}_d$.

□

(4)[Equivalence of neighborhoods axioms and open sets axioms]

(a) Given a neighborhood structure $\mathscr{N}$ on X, one can define a topology $\mathscr{T}$ via

$$\mathscr{T} = \{U \subset X : U \in \mathscr{N}(x) \text{ for any } x \in U.\}$$

Check:$\mathscr{T}$ is a topology on X,i.e. it satisfies (O1) – (O3)

(b) Given a topology $\mathscr{T}$ on X, one can define, for any $x \in X$,

$$\mathscr{N}(x) = \{N \subset X : \exists U \in \mathscr{T} \text{ s.t. } x \in U \text{ and } U \subset N\}.$$

Check:$\mathscr{N}$ is a neighborhood structure on X, i.e. it satisfies (N1) – (N4).

(d) Prove:the set of axioms (N1) – (N4) is equivalent to the set of axioms (O1) – (O3).

证明. 思路:

- 给定邻域结构 $\mathscr{N}$, 按定义得到 $\mathscr{T}$, 验证该 $\mathscr{T}$ 满足 (O1) – (O3), 用 $\mathscr{T}$ 按定义得到 $\mathscr{N}'$, 证明 $\mathscr{N} \subset \mathscr{N}', \mathscr{N}' \subset \mathscr{N}$.

- 给定拓扑结构 $\mathscr{T}$, 按定义得到 $\mathscr{N}$, 验证该 $\mathscr{N}$ 满足 (N1) – (N4), 用 $\mathscr{N}$ 按定义得到 $\mathscr{T}'$, 证明 $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}', \mathscr{T}' \subset \mathscr{T}$.

  以下是具体证明：

- 验证 $\mathscr{T}$ 满足 (O1) – (O3)
  - $\varnothing$ 显然属于 $\mathscr{T}$. 对任意 $x \in X$, 按照 $\mathscr{N}$ 的定义,$\mathscr{N}(x)$ 不是空集, 即存在 N_x 使得 $N_x \in \mathscr{N}(x)$, 而 $N_x \subset X$, 由 (N2) 有 $X \in \mathscr{N}(x)$, 因此 $X \in \mathscr{T}$.
  - 设 $U_1, U_2 \in \mathscr{T}$, 按定义, 对任意 $x \in U_1$,$U_1 \in \mathscr{N}(x)$, 对任意 $x \in U_2$,$U_2 \in \mathscr{N}(x)$, 因此对任意 $x \in U_1 \cap U_2$,$U_1 \in \mathscr{N}(x)$ 且 $U_2 \in \mathscr{N}(x)$, 由 (N3),$U_1 \cap U_2 \in \mathscr{N}(x)$, 因此 $U_1 \cap U_2 \in \mathscr{T}$.
  - 设 $U_\alpha \in \mathscr{T}$,$\alpha \in A$, 对任意 $x \in \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$, 存在 α' 使得 $x \in U_{\alpha'}$, 按定义,$U_{\alpha'} \in \mathscr{N}(x)$, 而 $U_{\alpha'} \subset \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$, 由 (N2) 有 $\bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathscr{N}(x)$, 因此 $\bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathscr{T}$.
  - 奇怪的是这里我只用到了 (N2) 和 (N3)
  - 讲义上定义 $\mathscr{N} : X \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)) \backslash \varnothing$, 也就是说一个点的邻域族不是空集, 但没有排除空集作为它的邻域,(N1) 排除了这一点.

- $\mathscr{N} \subset \mathscr{N}'$, 也就是最初的 $\mathscr{N}$ 包含于用 $\mathscr{T}$ 新生成的 $\mathscr{N}'$. 这等价于对于 $\mathscr{N}$ 的每一个元素找到一个它的子集是 $\mathscr{T}$ 中元素. 直觉上取 N 的内部即可. 由 (N4), 存在 $M \subset N$ 并且 $M \in \mathscr{N}(x)$, 使得任意的 $y \in M$ 成立 $N \in \mathscr{N}(y)$, 特别地, 由 (N1) 知,$x \in M$, 所以取 $\mathrm{Int}(N) = \{y \in N | N \in \mathscr{N}(y)\}$, 我们有 $x \in \mathrm{Int}(N) \subset N$, 并且显然 $\mathrm{Int}(N) \in \mathscr{T}$, 得证.

- $\mathscr{N}' \subset \mathscr{N}$, 也就是用 $\mathscr{T}$ 新生成的 $\mathscr{N}'$ 包含于最初的 $\mathscr{N}$. 按定义,$\mathscr{T} \subset \mathscr{N}$, 即开集也都是原有的邻域, 因此由 (N2) 新生成的邻域也都是原有的邻域.

- 验证 $\mathscr{N}$ 满足 (N1) – (N4)
  - 由定义,$x \in U \subset N$, 因此 $x \in N$.
  - $x \in U \subset N \subset M$, 因此 $M \in \mathscr{N}(x)$.
  - 若 $x \in U_1 \subset N_1, x \in U_2 \subset N_2$, 则 $x \in U_1 \cap U_2 \subset N_1 \cap N_2$, 由 (O2),$U_1 \cap U_2$ 也是开集, 因此 $N_1 \cap N_2 \in \mathscr{N}(x)$
  - 设 $x \in U \subset N$, 取 U 为 M 即可

- $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}'$, 也就是最初的 $\mathscr{T}$ 包含于用 $\mathscr{N}$ 新生成的 $\mathscr{T}'$. 因为对任意 $x \in U$,$x \in U \subset U$, 因此 U 是它中的每个元素的邻域, 这正是新生成的开集的定义, 得证.

- $\mathscr{T}' \subset \mathscr{T}$, 也就是用 $\mathscr{N}$ 新生成的 $\mathscr{T}'$ 包含于最初的 $\mathscr{T}$. 任取新生成的开集 U, 按定义, 对任意 $x \in U$, 存在最初的开集 U_x 使 $x \in U_x \subset U$, 则 $U = \bigcup\limits_{x \in U} U_x$, 由 (O3),$U$ 也是最初的开集.

- 证完发现自己没有用到 (O1), 为了用一下 (O1), 也联想到当初是如何推 (O1) 的, 我们可以从 X 是开集得到 X 是任意点的邻域, 也就是一个点的邻域族非空.

- 但感觉实在是用不上 (O1) 里的 $\varnothing$ 是开集. 况且从 N 推 O 得到它时也很平凡.

$\square$

Chapter 2

收敛性与连续性

1 拓扑空间内的收敛

1.1 收敛

正如我们之前所提到过的, 引入拓扑结构是为了将收敛和连续映射的概念推广到更一般的集合. 容易在任意拓扑空间中定义一个序列收敛的概念. 直觉上,$x_n \to x_0$ 意味着“对于 x_0 的任意邻域 N, 序列 x_n 将最终进入并停留在 N”中. 将这个翻译成开集的语言, 我们有

定义 1.1 (收敛)**.** *我们称一列点 $x_n \to x_0$, 如果对任意的邻域 x_0 的 N, 存在 $M > 0$ 使得 $x_n \in N$ 对于所有的 $n > N$.*

对任意包含 x_0 的开集, 存在 $N > 0$ 使得 $x_n \in U$ 对于所有的 $n > N$.

用邻域概念来定义和用收敛概念来定义都是一样的

例 1.2. *1. $(X, \mathcal{T}_d)$ 在度量下收敛与在用度量诱导的拓扑收敛是一样的.*

2. $(X, \mathcal{T}_{discrete}) : x_n \to x_0$ 当且仅当存在 $N > 0$ 使得 $x_n = x_0$ 对于 $n > N$.

3. $(X, \mathcal{T}_{trivial})$ $x_n \to x_0$ 对任意的点列成立.

4. $(X, \mathcal{T}_{cocoutable})$

注记. *如果 X 是可数集, 那么 $\mathcal{T}_{cocountable} = \mathcal{T}_{discrete}$*

如果 X 是不可数集, 那么 $\mathcal{T}_{countalbe} \subsetneqq \mathcal{T}_{discrete}$

假设 $x_n \to x_0$, 对于 $U = X \setminus \{x_n : x_n \neq x_0\}$ 那么存在 $N > 0$ 使得 $x_n \in U$ 对于 $n > N$, 那么 $x_n = x_0$ 对于 $n > N$.

1.2 逐点收敛拓扑

例 1.3. *考虑 $X = \mathcal{M}([0,1] \to \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{[0,1]}$*

回忆函数列 $f_n \to f$ 的逐点收敛.

事实: 存在一个 X 拓扑上的使得逐点收敛当且仅当在这个拓扑下收敛.

1. $\varnothing, X \in \mathcal{T}_{pc}$

2. $U_1, U_2 \in \mathcal{T}_{p,c}, f \in U_1 \cap U_2$ 根据定义, 存在 $x_1, \cdots, x_m$ 以及 ε_1 使得

$y_1, y_2, \cdots, y_n, \varepsilon_2$

证明. $\Rightarrow$ 假设逐点收敛, 取一个开集 U 包含 f, 存在 $\omega(f, x_1, \cdots, x_m, \varepsilon) \subset U$

由逐点收敛, 可以找到一个 N, 使得

$$|f_n(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon, 1 \leqslant i \leqslant m$$

所以 $f_n \in \omega(f, x_1, \cdots, x_m, \varepsilon) \subset U$

$\Leftarrow$ 假设 $f_n \to f$ 在 $(X, \mathcal{T}_{pc})$, 对任意 $x \in [0,1]$, 取 $U = \omega(f, x\varepsilon)$, 那么 U 是一个包含 x 的开集, 存在 N 使得 $f_n \in U$, 对任意 $n > N$, 即 $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$

所以 f_n 逐点收敛到 f. □

1.3 逐点收敛作为拓扑空间中的收敛

2 拓扑空间之间的连续映射

- 开集的原像是开集当且仅当闭集的原像是闭集, 开集的像是开集与闭集的像是闭集之间没关系
  - 前者具有这样良好的性质是因为 $f^{-1}(A\backslash B)=f^{-1}(A)\backslash f^{-1}(B)$
  - 但相应的我们只有 $f(A\backslash B)\supset f(A)\backslash f(B)$, 因此我们必须区分开映射和闭映射的概念
  - 但是, 若加上 f 是单射的条件, 就又有 $f(A\backslash B)=f(A)\backslash f(B)$, 此时开映射和闭映射等价
- 如果 f 不是满射, 先逆后映可能不满
- 如果 f 不是单射, 先映后逆可能变多
- 解读"U 是开集当且仅当 $f^{-1}(U)$ 是开集"
  - U 是开集 $\Longrightarrow f^{-1}(U)$ 是开集：这意味着 f 连续！
  - $f^{-1}(U)$ 是开集 $\Longrightarrow U$ 是开集：这不意味着 f 是开映射！
    * 首先,X 侧的开集不一定能够被表示为某个 Y 中**集合** U 的原像 $f^{-1}(U)$ 的形式！
    * 其次, 哪怕 X 侧的开集都能够被表示为某个 Y 中**集合** U 的原像 $f^{-1}(U)$ 的形式,U 也不一定是它的像,$f(f^{-1}(U))$ 可能真包含于 U！
    * 当 f 是满射, 我们确实有 $f(f^{-1}(U))=U$, 但第一个问题仍旧是不可逾越的.
  - "U 是开集当且仅当 $f^{-1}(U)$ 是开集"能推出 f 连续, 推不出 f 是开映射.

2.1 拓扑空间之间的连续映射

正如我们最初解释过的, 拓扑结构能够被用来定义映射的连续性. 这里有两种不同的方式：一种利用收敛, 一种利用拓扑结构本身. 不幸的是这两种方式给出不同的结果.

让我们先通过符合直觉的收敛序列的方式定义连续性：

定义 2.1. *我们称映射 $f:(X,\mathscr{T}_X)\to(Y,\mathscr{T}_Y)$ 是*

(1) *在 x_0 处序列连续如果对任意 X 中的收敛序列 $x_n\to x_0$, 都有 Y 中的收敛序列 $f(x_n)\to f(x_0)$.*

(2) *序列连续如果它处处序列连续.*

你可能已经注意到了我们使用了"序列"这个词, 以便区分于通常意义下的连续映射.

为了通过拓扑结构本身来定义连续映射, 我们回忆度量空间之间的映射 $f:(X,d_X)\to(Y,d_Y)$ 在 x_0 处连续当且仅当靶空间 Y 中任意 $f(x_0)$ 的邻域 B 的原像 $f^{-1}(B)$ 是源空间 X 中 x_0 的邻域.

受这个性质启发, 我们定义

定义 2.2. *我们称映射 $f:(X,\mathscr{T}_X)\to(Y,\mathscr{T}_Y)$ 是*

(1) *在 x_0 处连续如果 Y 中任意 $f(x_0)$ 的邻域 B 的原像 $f^{-1}(B)$ 是 X 中 x_0 的邻域.*

(2) *连续映射如果它处处连续.*

由定义我们容易证明

命题 2.3.

(1) 连续映射的复合是连续的.

(2) 序列连续映射的复合是序列连续的.

注记. 王老师讲义上的命题是对局部的点说的, 然后全局作为了推论, 有空再改吧.

2.2 序列连续性与连续性的比较

在度量空间中, 序列连续性和连续性是等价的. 对于拓扑空间, 我们有

命题 2.4. 如果 $f:(X,\mathscr{T}_X)\to(Y,\mathscr{T}_Y)$ 在 x_0 处连续, 那么它也在 x_0 处序列连续. 特别地, 任意连续映射都是序列连续映射.

证明. 设 $x_n\to x_0$. 任取 $f(x_0)$ 地邻域 B, 由连续性,$f^{-1}(B)$ 是 x_0 的邻域. 因为 $x_n\to x_0$, 所以存在 $N>0$ 使得 $x_n\in f^{-1}(B)$ 对于 $n>N$. 从而 $f(x_n)\in B$ 对于 $n>N$, 即 $f(x_n)\to f(x_0)$. 所以 f 在 x_0 处是序列连续的. □

但是, 相反的命题是错误的.

例 2.5. 考虑恒同映射

$$\mathrm{Id}:(\mathbb{R},\mathscr{T}_{cocountable})\to(\mathbb{R},\mathscr{T}_{discrete}),\quad x\mapsto x.$$

那么 Id 是序列连续的, 因为正如之前看到的, 一个序列在 $(\mathbb{R},\mathscr{T}_{discrete})$ 中收敛当且仅当它在 $(\mathbb{R},\mathscr{T}_d)$ 中收敛, 并且收敛到相同的极限. 但是,Id 处处不连续. 对任意 $x\in\mathbb{R}$, 区间 $[x-1,x+1]$ 是 $(\mathbb{R},\mathscr{T}_{discrete})$ 中 x 的开邻域, 但它不是 $(\mathbb{R},\mathscr{T}_{cocountable})$ 中 x 的开邻域.

2.3 通过开集的整体连续性

定义 2.6. 我们称 f 是连续的在 x_0 处如果对任意的 $f(x_0)$ 的邻域, 它的原像是一个 x 的邻域.

我们称 f 是连续映射如果在每个点都连续.

命题 2.7. 如果 f 在 x_0 处是连续的,g 在 $f(x_0)$ 是连续的, 那么 $g\circ f$ 也在 x_0 处连续.

f 在 x_0 处序列连续,g 在 $f(x_0)$ 也序列连续, 那么 $g\circ f$ 在 x_0 序列连续.

命题 2.8. 如果 f 在一点连续, 那么 f 在这一点序列连续.

证明. 设 $x_n\to x_0$, 对任意 x_0 点的邻域, 我们有 $f^{-1}(N)$ 是一个邻域, 我们有 □

定理 2.9. $f(X,\mathcal{T}_X)\to(Y,\mathscr{T}_Y)$ 是连续的当且仅当对于像空间中的任何一个开集, 它的原像是一个开集当且仅当闭集的原像是闭集.

补集的原像是原像的补集.

$$f^{-1}(\bigcup_\alpha B_\alpha)=\bigcup_\alpha B$$

2.4 开映射和闭映射

在连续映射下, 开集的原像是开的, 闭集的原像是闭的. 但一般地,

- 开集在连续映射下的像不一定是开的
- 闭集在连续映射下的像不一定是闭的

定义 2.10 (开映射和闭映射)**.** 设 X, Y 是拓扑空间, 称映射 $f: X \to Y$ 是

- 开映射如果对任意 X 中的开集 $U, f(U)$ 是 Y 中的开集.
- 闭映射如果对任意 X 中的闭集 $F, f(F)$ 是 Y 中的闭集.

尽管看起来开映射和闭映射的概念是更自然的, 它们在拓扑中不像连续映射那样重要和方便. 下面是一个原因:

我们总是有

$$f^{-1}(\bigcup_\alpha B_\alpha) = \bigcup_\alpha f^{-1}(B_\alpha), f^{-1}(\bigcap_\alpha B_\alpha) = \bigcap_\alpha f^{-1}(B_\alpha), f^{-1}(Y \backslash B) = X \backslash f^{-1}(B).$$

但一般地, 我们只有

$$f(\bigcup_\alpha A_\alpha) = \bigcup_\alpha f(A_\alpha), f(\bigcap_\alpha A_\alpha) \subset \bigcap_\alpha f(A_\alpha), f(X \backslash A) \supset f(X) \backslash f(A).$$

但是, 开映射和闭映射确实出现在其他的一些数学分支中并且扮演着重要的角色. 比如,

-

2.5 连续映射的例子

例 2.11. *1.* 任何常值映射 $f: X \to Y$ 是连续映射. 这里也能看到为什么要求空集和全集是开集.

2. 任何一个映射 $f: (X, \mathscr{T}_X) \to (Y, \mathscr{T}_{trivial})$ 是连续的

3. 任何一个映射 $f: (X, \mathscr{T}_{discrete}) \to (Y, \mathscr{T}_Y)$ 是连续的

4. 恒等映射是连续的当且仅当 $\mathscr{T}_2 \subset \mathscr{T}_1$.

5. $\pi_1 : (X \times Y, \mathscr{T}_{X \times Y})$

2.6 同胚

利用连续映射, 我们能够定义拓扑空间的等价.

定义 2.12 (同胚)**.** 我们称拓扑空间 $(X, \mathscr{T}_X)$ 和 $(Y, \mathscr{T}_Y)$ 是同胚的, 记作 $X \simeq Y$, 如果存在一个双射 $f: X \to Y$ 使得 f 和 f^{-1} 都是连续的. 映射 f 称为是 X 和 Y 之间的一个同胚.

例 2.13.

(1) $(0, 1) \simeq \mathbb{R}$.

(2) $\mathbb{S}^n - \{the\ north\ pole\} \simeq \mathbb{R}^n$

(3) $[0,1] \not\simeq (0,1) \not\simeq [0,1) \not\simeq \mathbb{S}^1 \not\simeq \mathbb{R}^2$

命题 2.14. 同胚是拓扑空间之间的一个等价关系.

注记. 我们将同胚的拓扑空间视为相同空间. 我们称一个性质是拓扑性质如果它在同胚下保持不变.

除了是连续映射和双射, 容易从定义看出同胚映射还必须既是开映射和闭映射, 相反地

命题 2.15. 设 $f: X \to Y$ 是连续双射. 如果 f 是开的或闭的, 那么 f 是一个同胚.

正如在度量空间中的情形一样, 我们能够定义拓扑嵌入的概念:

定义 2.16. 设 $f: X \to Y$ 是连续单射. 我们称 f 是一个拓扑嵌入如果 f 是从 X 到 $f(X) \subset Y$ 的同胚. 其中赋予 $f(X)$ 子空间拓扑.

2.7 相容性：拓扑群和拓扑向量空间

我们还能利用连续性来定义其他结构与拓扑结构的相容性. 例如

定义 2.17. 称集合 G 是拓扑群, 如果其上既有拓扑结构又有群结构, 并且

$$m\colon G \times G \to G, (g_1, g_2) \mapsto g_1 \cdot g_2 \quad \text{和} \quad i\colon G \to G, g \mapsto g^{-1}$$

都是连续映射.

例 2.18.

(1) 任何群, 赋予离散拓扑, 都是拓扑群. 称这样的群为离散群.

定义 2.19 (拓扑向量空间)**.** 向量空间上有一个拓扑, 使得

$$+ V \times V \to V(x, y) \mapsto x + y$$

$$\cdot K \times V(\alpha, x) \mapsto x\alpha x$$

3 PSet02-2

(1)[The Sorgenfrey line]Endow $\mathbb{R}$ with the Sorgenfrey topology

$$\mathscr{T}_{Sorgenfrey} = \{U \subset \mathbb{R} | \forall x \in U, \exists \varepsilon > 0 \text{ s.t. } [x, x+\varepsilon) \subset U\}.$$

(a) Check:$\mathscr{T}_{Sorgenfrey}$ is a topology.

(b) Prove: Every left-closed-right-open interval $[a, b)$ is both open and closed.

(c) Prove:$\mathscr{T}_{Sorgenfrey}$ is strictly stronger than the usual topology $\mathscr{T}_{usual}$ on $\mathbb{R}$.

(d) Explore the meaning of convergence in $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_{Sorgenfrey})$

证明.

(a)

- 显然 $\varnothing, \mathbb{R} \in \mathscr{T}_{Sorgenfrey}$
- 设 $U_1, U_2 \in \mathscr{T}_{Sorgenfrey}$, 任取 $x \in U_1 \cap U_2$, 则存在 ε_1 和 ε_2 使得 $[x, x+\varepsilon_1) \in U_1, [x, x+\varepsilon_2) \in U_2$, 取 $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, 则 $[x, x+\varepsilon) \in U_1 \cap U_2$
- 设 $U_a \in \mathscr{T}_{Sorgenfrey}, a \in A$, 任取 $x \in \bigcup\limits_{a \in A} U_a$, 则存在 a 使得 $x \in U_a$, 则存在 ε 使得 $[x, x+\varepsilon) \subset U_a \subset \bigcup\limits_{a \in A} U_a$

(b)

- 开集. 任取 $x \in [a, b)$, 令 $\varepsilon = b - x$, 则 $[x, x+\varepsilon) = [x, b) \subset [a, b)$
- 闭集. 考虑 $\mathbb{R} \backslash [a, b) = (-\infty, a) \cup [b, +\infty)$, 容易像上面一样证明 $(-\infty, a)$ 和 $[b, +\infty)$ 都是开集, 因此 $[a, b)$ 是闭集

(c)

- $\mathscr{T}_{usual} \subset \mathscr{T}_{Sorgenfrey}$. 设 $U \subset \mathscr{T}_{usual}$, 对任意 $x \in U$, 存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset U$, 而 $[x, x+\varepsilon) \subset (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, 因此 $U \in \mathscr{T}_{Sorgenfrey}$
- $[a, b)$ 是 $\mathscr{T}_{Sorgenfrey}$ 中开集但不是 $\mathscr{T}_{usual}$ 中开集

(d) 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 使得对任意 $n > N, x_n \in [x, x+\varepsilon)$, 即 x_n 从右侧逼近点 x_0.

□

(2)[Different conceptions of continuity]

(a) Recall that a function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is right continuous if $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x_n) = f(x_0)$.Prove:a function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is right continuous if and only if the map $f : (\mathbb{R}, \mathscr{T}_{Sorgenfrey}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{T}_{usual})$ is continuous.

(b) Let $(X, \mathscr{T})$ be any topological space. We say a function $f : X \to \mathbb{R}$ is upper semi-continuous at a point $x_0 \in X$ if for any $\varepsilon > 0$, there exists a neighborhood U of x_0 such that $f(x) \leqslant f(x_0) + \varepsilon$ holds for all $x \in U$, and we say f is an upper semi-continuous function if it is upper semi-continuous everywhere. Construct a new topology $\mathscr{T}_{u.s.c}$ on $\mathbb{R}$ so that a function $f : X \to \mathbb{R}$ is upper semi-continuous if and only if the map $f : (X, \mathscr{T}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{T}_{u.s.c})$ is continuous.

证明.

(a) • $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to x_0+} f(x_n)=f(x_0),\forall\{x_n\}\\ \Longrightarrow\ &\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,[x,x+\delta)\subset f^{-1}\left(B(f(x_0),\varepsilon)\right)\\ \Longrightarrow\ &f:(\mathbb{R},\mathscr{T}_{Sorgenfrey})\to(\mathbb{R},\mathscr{T}_{usual})\text{ is continuous at }x_0\end{aligned}$$

• $\Leftarrow$

$$f:(\mathbb{R},\mathscr{T}_{Sorgenfrey})\to(\mathbb{R},\mathscr{T}_{usual})\text{ is continuous at }x_0$$

$f^{-1}(B(f(x_0),\varepsilon))$ 是 x_0 的邻域
存在开集 U 使得 $x_0\in U\subset f^{-1}(B(f(x_0),\varepsilon))$, 存在 δ 使得 $[x,x+\delta)\subset U$, 即 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,[x,x+\delta)\subset f^{-1}\left(B(f(x_0),\varepsilon)\right)$.

(b)

$$\mathscr{T}_{u.s.c}=\big\{(-\infty,a]\big|a\in\mathbb{R}\big\}$$

□

(3)[The pasting lemma]

(a) Suppose $X=A\cup B$, where A,B are closed sets in X. Consider a map $f:X\to Y$. Suppose $f|_A:A\to Y$ and $f|_B:B\to Y$ are continuous.Prove: $f:X\to Y$ is a continuous map.

(b) Show that the same result fails for $X=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$, where each A_n is closed in X.

(c) Prove: If $X=\bigcup\limits_{\alpha}U_\alpha$, where each U_α is open in X, and if $f|_{U_\alpha}:U_\alpha\to Y$ is continuous, then $f:X\to Y$ is continuous.

证明.

(a) 设 U 是 Y 中的闭集, 由于 $f|_A$ 是连续函数, 所以 $f^{-1}(U)\cap A$ 是一个 U 中的闭集和 A 的交, 因为 A 也是 U 中闭集, 所以 $f^{-1}(U)\cap A$ 是 U 中闭集, 同理 $f^{-1}(U)\cap B$ 也是闭集, 而 $f^{-1}(U)=(f^{-1}(U)\cap A)\cup(f^{-1}(U)\cap B)$, 所以 $f^{-1}(U)$ 是闭集. 因此 f 是连续映射.

(b)

$$\tau:(\mathbb{Z},\mathscr{T}_{cofinite})\to(\mathbb{R},\mathscr{T}_{usual})$$

τ 限制在单个整数上显然是连续映射, 但是实直线上有界开集的原像至多包含有限多个点, 因此不可能是开的.

(c) 与 (a) 同理可证.

□

(4)[Homeomorphisms]

(a) Let $N = (0, \cdots, 0, 1)$ be the "north pole" of $\mathbb{S}^n = \left\{(x^1, \cdots, x^{n+1}) \middle| x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\right\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$.Show that $\mathbb{S}^n \backslash \{N\}$ is homeomorphic to $\mathbb{R}^n$ by explicitly construct a homeomorphism.

(b) Use Brouwer's invariance of domain theorem to prove: If $n \neq m$, then $\mathbb{R}^n$ is not homeomorphic to $\mathbb{R}^m$.

(c) Prove: If $f : X \to Y$ is a homeomorphism, then for any $A \subset X$,$f : X\backslash A \to Y\backslash f(A)$ is a homeomorphism. As a consequence,prove $[0,1] \not\simeq (0,1) \not\simeq [0,1) \not\simeq \mathbb{S}^1 \not\simeq \mathbb{R}^2$

证明.

(a) 设 $\mathbb{S}^n$ 和 $\mathbb{R}^n$ 在笛卡尔坐标系下的坐标分别为 $x_i, 0 \leqslant i \leqslant n, X_i, 1 \leqslant i \leqslant n$. 设 $s^2 = \sum_{j=1}^{n} X_j^2$, 则

$$x_0 = \frac{s^2-1}{s^2+1}, x_i = \frac{2X_i}{s^2+1}, 1 \leqslant i \leqslant n$$

(b) 不妨设 $n < m$. 考虑包含映射 $f : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m$.$f$ 是连续单射, 由 Brouwer 区域不变性定理我们知道 $\mathbb{R}^n$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的开集. 这是不可能的, 因为超平面中的点的邻域必定包含该超平面外的点.

(c) U 是 $X\backslash A$ 中的开集

$\Longleftrightarrow$ 存在 X 中开集 V 使得 $U = V \cap (X\backslash A)$

$\Longleftrightarrow$ 存在 Y 中开集 $f(V)$ 使得 $f(U) = f(V) \cap (Y\backslash f(A))$

$\Longleftrightarrow$ $f(U)$ 是 $Y\backslash f(A)$ 中的开集

因此 $f : X \to Y\backslash f(A)$ 是同胚.

假设 $f : [0,1] \to (0,1)$ 是同胚, 则 $[0,1) \simeq (0,1)\backslash f(1)$, 但前者是连通的, 后者是不连通的, 所以这是不可能的. 相似的论证可证明其余.

$\square$

Chapter 3

基和子基, 诱导拓扑和余诱导拓扑

1 拓扑的基和子基

- 拓扑基的定义
- 由基生成的拓扑的两种刻画
- 判断给定集族是否是给定拓扑的基的准则
  - 给定集族是否是基
  - 生成的拓扑是否是给定拓扑
- 拓扑子基的定义
- 利用基或子基刻画连续性

1.1 由基定义的拓扑

如果你盯着 $\mathscr{T}_{metric}, \mathscr{T}_{Sorgenfrey}, \mathscr{T}_{p.c.}$ 和 $\mathscr{T}_{X\times Y}$ 的定义,

$$\begin{aligned}
\mathscr{T}_{metric} &= \{U \subset X \mid \forall x \in U, \exists r > 0 \text{ s.t. } B(x,r) \subset U\}, \\
\mathscr{T}_{Sorgenfrey} &= \{U \subset \mathbb{R} \mid \forall x \in U, \exists \varepsilon > 0 \text{ s.t. } [x, x+\varepsilon) \subset U\}, \\
\mathscr{T}_{X\times Y} &= \{W \subset X \times Y \mid \forall (x,y) \in W, \exists U \in \mathscr{T}_X \text{ and } V \in \mathscr{T}_Y \text{ s.t. } (x,y) \in U \times V \subset W\}, \\
\mathscr{T}_{p.c.} &= \{U \subset X \mid \forall f_0 \in U, \exists x_1, \cdots, x_n \in [0,1] \text{ and } \varepsilon > 0 \text{ s.t. } \omega(f_0; x_1, \cdots, x_n; \varepsilon) \subset U\},
\end{aligned}$$

你能轻易地找到一个共同点：它们都具有形式

$$\mathscr{T}_{\mathcal{B}} := \left\{U \subset X \middle| \forall x \in U, \exists B \in \mathcal{B} \text{ s.t. } x \in B \subset U\right\}$$

对于某个集族 $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$. 在这些定义背后一定存在某个通用的规则！

让我们试着找出它！设 $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ 是 X 的一个子集族, 比如度量拓扑情形下的

$$\mathcal{B} = \text{ 所有开球.}$$

注意：$\mathcal{B}$ 本身不是一个拓扑.

我们的问题是, 在对 $\mathcal{B}$ 的什么样的假定下, 上面定义的集族 $\mathscr{T}_{\mathcal{B}}$ 是一个拓扑？

- 根据构造,$\varnothing \in \mathscr{T}_{\mathcal{B}}$.
- 要想使 $X \in \mathcal{B}$, 我们需要对任意的 $x \in X$, 存在 $B \in \mathcal{B}$ 使得 $x \in B$.
- 设 $U_1, U_2 \in \mathscr{T}_{\mathcal{B}}$, 我们希望 $U_1 \cap U_2 \in \mathscr{T}_{\mathcal{B}}$, 即对任意的 $x \in U_1 \cap U_2$, 存在 $B \in \mathcal{B}$ 使得 $x \in B \subset U_1 \cap U_2$.

  不幸的是这个条件包含了 $U_1, U_2 \in \mathscr{T}_{\mathcal{B}}$, 也就是它并不是对集族 $\mathcal{B}$ 本身的一个条件. 但是, 根据构造, 对任意的 $x \in U_1 \cap U_2$, 存在 $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ s.t. $x \in B_1 \subset U_1, x \in B_2 \subset U_2$. 所以要想上式成立, 我们可以假定对任意的 $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, 任意的 $x \in B_1 \cap B_2$, 存在 $B \in \mathcal{B}$, 使得 $x \in B \subset B_1 \cap B_2$.

  注记. 这是充分条件, 也是必要条件! 因为根据构造, 任意元素 $B \in \mathcal{B}$ 也是 $\mathscr{T}_{\mathcal{B}}$ 中的元素!
- 最后设 $U_\alpha \in \mathscr{T}_{\mathcal{B}}$, 那么我们自动有 $\bigcup\limits_\alpha U_\alpha \in \mathscr{T}_{\mathcal{B}}$, 因为对任意 $x \in \bigcup\limits_\alpha U_\alpha$, 存在 α_0 使得 $x \in U_{\alpha_0}$, 所以存在 $B \in \mathcal{B}$ 使得 $x \in B \subset U_{\alpha_0}$, 这就意味着 $x \in B \subset \bigcup\limits_\alpha U_\alpha$, 即 $\bigcup\limits_\alpha U_\alpha \in \mathscr{T}_{\mathcal{B}}$.

因此我们的问题有了一个圆满的回答：$\mathscr{T}_{\mathcal{B}}$ 是一个拓扑的充要条件是集族 $\mathcal{B}$ 满足

(B1) $\forall x \in X, \exists B \in \mathcal{B}$ s.t. $x \in B$

(B2) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}, \forall x \in B_1 \cap B_2, \exists B \in \mathcal{B}$ s.t. $x \in B \subset B_1 \cap B_2$.

定义 1.1 (拓扑的基). (1) 集族 $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ 称作是一个拓扑的基如果它满足条件 (B1) 和 (B2).

(2) $\mathscr{T}_{\mathcal{B}}$ 称做是由基 $\mathcal{B}$ 生成的拓扑.

注记. 不同的基可能生成相同的拓扑. 比如, 下面的三个集族都是能够生成 $\mathbb{R}^2$ 上的欧式拓扑的基.

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_1 &= \left\{B(x,r) \middle| x \in \mathbb{R}^2, r > 0\right\}, \\
\mathcal{B}_2 &= \left\{B(x,r) \middle| x \in \mathbb{Q}^2, r \in \mathbb{Q}_{>0}\right\}, \\
\mathcal{B}_3 &= \left\{(a,b) \times (c,d) \middle| a,b,c,d \in \mathbb{R}\right\}.
\end{aligned}$$

注意 $\mathcal{B}_2$ 是一个可数集!

注记. 让我们再次强调：按定义,$\mathcal{B} \subset \mathscr{T}_{\mathcal{B}}$, 也就是 $\mathcal{B}$ 中的每个元素都是拓扑 $\mathscr{T}_{\mathcal{B}}$ 中的开集. 一般来说相反的命题是错误的.

1.2 例子：箱拓扑

假设我们有一族拓扑空间 $(X_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)$, 我们希望在笛卡尔积

$$\prod_\alpha X_\alpha = \left\{(x_\alpha) \middle| x_\alpha \in X_\alpha\right\}$$

上定义拓扑. 正如两个拓扑空间的笛卡尔积的情形, 我们可以选择

$$\mathcal{B} = \left\{\prod_\alpha U_\alpha \middle| U_\alpha \in \mathscr{T}_\alpha\right\}.$$

容易验证 $\mathcal{B}$ 满足 (B1),(B2), 因此我们得到一个拓扑

$$\mathscr{T}_{Box} = \left\{U \subset \prod_\alpha X_\alpha \middle| \forall (x_\alpha) \in U, \exists U_\alpha \in \mathscr{T}_\alpha \text{ s.t. } (x_\alpha) \in \prod_\alpha U_\alpha \subset U\right\}.$$

这被称为 $X = \prod\limits_\alpha X_\alpha$ 上的箱拓扑.

1.3 通过基定义拓扑：最小性

为了理解 $\mathcal{B}$ 和 $\mathscr{T}_{\mathcal{B}}$ 的关系, 我们给出“基 $\mathcal{B}$ 生成拓扑 $\mathscr{T}_{\mathcal{B}}$”这句话的额外解释.

命题 1.2. 如果 $\mathcal{B}$ 是拓扑 $\mathscr{T}_{\mathcal{B}}$ 的基, 那么

$$\mathscr{T}_{\mathcal{B}} = \left\{ \bigcup_{B\in\mathcal{B}'} \middle| \mathcal{B}' \subset \mathcal{B} \right\}.$$

证明. 正如我们之前注记的,$\mathcal{B} \subset \mathscr{T}_{\mathcal{B}}$. 所以对任意子集族 $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$, 我们有

$$\bigcup_{B\in\mathcal{B}'} B \in \mathscr{T}_{\mathcal{B}}.$$

相反地, 对任意 $U \in \mathscr{T}_{\mathcal{B}}$ 和任意 $x \in U$, 按定义存在 $B_x \in \mathcal{B}$ 使得 $x \in B_x \subset U$. 这意味着 $U = \bigcup_{x\in U} B_x$, 即 U 具有要求的形式. □

作为推论, 我们有

推论 1.3. 设 $\mathcal{B}$ 是 $\mathscr{T}_{\mathcal{B}}$ 的基, 并且 $B \subset \mathscr{T}'$, 那么 $\mathscr{T}_{\mathcal{B}} \subset \mathscr{T}'$.

这意味着 $\mathscr{T}_{\mathcal{B}}$ 是使得 $\mathcal{B}$ 中的所有集合为开集的最小的拓扑：

$$\mathscr{T}_{\mathcal{B}} = \bigcap_{B\subset\mathscr{T}', \mathscr{T}' \text{ is a topology}} \mathscr{T}'.$$

1.4 由任意子集族生成的拓扑

命题 1.4. 给定任意 X 上的拓扑族 $\mathscr{T}_\alpha$,$\bigcap_\alpha \mathscr{T}_\alpha$ 是一个拓扑.

证明.

- $\varnothing, X \in \mathscr{T}_\alpha, \forall\alpha \Rightarrow \varnothing, X \in \bigcap_\alpha \mathscr{T}_\alpha$
- $U_1, U_2 \in \mathscr{T}_\alpha, \forall\alpha \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \mathscr{T}_\alpha, \forall\alpha \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \bigcap_\alpha \mathscr{T}_\alpha$
- $U_\beta \in \mathscr{T}_\alpha, \forall\alpha \Rightarrow \bigcup_\beta U_\beta \in \mathscr{T}_\alpha \Rightarrow \bigcup_\beta U_\beta \in \bigcap_\alpha \mathscr{T}_\alpha$.

□

现在设 $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ 是 X 的任意子集族.

定义 1.5. 由 $\mathcal{S}$ 生成的拓扑定义为

$$\mathscr{T}_{\mathcal{S}} := \bigcap_{\mathcal{S}\subset\mathscr{T}'} \mathscr{T}'.$$

换句话说,$\mathscr{T}_{\mathcal{S}}$ 是使得所有 $\mathcal{S}$ 中的集合为开集的最弱拓扑.
一个自然的问题是,$\mathscr{T}_{\mathcal{S}}$ 到底是什么？

命题 1.6. 设 $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$, 记

$$\mathcal{B} = \left\{ B \middle| \exists S_1, \cdots, S_m \in \mathcal{S} \text{ s.t. } B = S_1 \cap \cdots \cap S_m \right\}.$$

(1) 如果 $\bigcup_{S\in\mathcal{S}} S = X$, 那么 $\mathcal{B}$ 是 $\mathscr{T}_{\mathcal{S}}$ 的基, 即 $\mathscr{T}_{\mathcal{S}} = \mathscr{T}_{\mathcal{B}}$.

(2) 一般地, 如果 $X' = \bigcup_{S\in\mathcal{S}} \subset X$, 那么 $\mathcal{B}$ 是 X' 上的拓扑 $\mathscr{T}_{\mathcal{B}}$ 的基, 并且 $\mathscr{T}_{\mathcal{S}} = \{X\}\bigcup \mathscr{T}_{\mathcal{B}}$.

证明.

(1) 按定义,$\mathcal{S} \subset \mathcal{B}$. 因此 $\bigcup_{S\in\mathcal{S}} = X$ 蕴涵着 $\bigcup_{B\in\mathcal{B}} = X$, 这就等价于集族 $\mathcal{B}$ 满足条件 (B1). 根据构造,$\mathcal{B}$ 也满足条件 (B2). 所以 $\mathcal{B}$ 是一个基. 显然对任意拓扑 $\mathscr{T}'$,

$$\mathscr{T}' \supset \mathcal{S} \Longleftrightarrow \mathscr{T}' \supset \mathcal{B}.$$

所以 $\bigcap_{\mathcal{S}\subset\mathscr{T}'} \mathscr{T}' = \bigcap_{\mathcal{B}\subset\mathscr{T}'} \mathscr{T}'$, 即由 $\mathcal{B}$ 生成的拓扑正是 $\mathscr{T}_{\mathcal{S}}$.

(2) 由 (1),$\{X\}\bigcup \mathscr{T}_{\mathcal{B}}$ 是 X 上的拓扑. 根据构造, 它是 X 上使得 $\mathcal{S}$ 为开集的最弱拓扑.

□

1.5 基或子基的刻画

一个自然的问题是：给定一个集族 $\mathcal{B}$, 我们如何判断它是否是一个给定拓扑 $\mathscr{T}$ 的基？这里有一个简单的准则：

命题 1.7. 设 $(X, \mathscr{T})$ 是一个拓扑空间. 集族 $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ 是拓扑 $\mathscr{T}$ 的基当且仅当

(1) $\mathcal{B} \subset \mathscr{T}$

(2) 对任意 $U \in \mathscr{T}$ 和任意 $x \in U$, 存在 $B \in \mathcal{B}$ 使得 $x \in B \subset U$.

证明.

- 按定义, 如果 $\mathcal{B}$ 是 $\mathscr{T}$ 的基, 那么 (1)(2) 成立.
- 容易看出 (2) 蕴涵着 (B1), 并且 (1)(2) 蕴涵着 (B2). 因此 $\mathcal{B}$ 是一个基. 此外,(2) 蕴涵着 $\mathscr{T}$ 中开集都是 $\mathscr{T}_{\mathcal{B}}$ 中的开集, 也就是 $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}_{\mathcal{B}}$. 但是由最小性,$\mathscr{T}_{\mathcal{B}} \subset \mathscr{T}$. 所以由 $\mathcal{B}$ 生成的拓扑就是 $\mathscr{T}$.

□

类似地我们还有

命题 1.8. 设 $(X, \mathscr{T})$ 是一个拓扑空间. 集族 $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ 是 $\mathscr{T}$ 的子基当且仅当

(1) $\mathcal{S} \subset \mathscr{T}$

(2) 对任意 $U \subset \mathscr{T}$ 和任意 $x \in U$, 存在 $S_1, \cdots, S_n \in \mathcal{S}$ 使得 $x \in \bigcap_{i=1}^{n} \subset U$.

1.6 通过基和子基定义连续性

我们已经看到拓扑空间之间的映射 $f : X \to Y$ 是连续的当且仅当开集的原像是开集. 不难看出我们只需要检验某些子集的开性, 即, 基或子基中的开集的原像的开性.

定理 1.9. 设 $\mathcal{B}$ 是 $\mathscr{T}_Y$ 的基,$\mathcal{S}$ 是 $\mathscr{T}_Y$ 的子基. 那么映射 $f : (X, \mathscr{T}_X) \to (Y, \mathscr{T}_Y)$ 是连续的当且仅当对任意 $B \in \mathcal{B}$ 有 $f^{-1}(B)$ 是 X 中开集当且仅当对任意 $S \in \mathcal{S}$ 有 $f^{-1}(S)$ 是 X 中开集.

1.7 例子：序拓扑

定义 1.10. 一个偏序集合是一个集合 X 和一个偏序关系 $\leqslant$, 即

- $x \leqslant x$,
- 如果 $x \leqslant y, y \leqslant z$, 那么 $x \leqslant z$,
- 如果 $x \leqslant y, y \leqslant x$, 那么 $x = y$.

一个全序子集是一个偏序集 $(X, \leqslant)$ 满足对任何 x, y, 或者 $x \leqslant y$, 或者 $y \leqslant x$.

注意到给定序关系 $\leqslant$ 后, 我们可以定义 $<$ 为

$$x < y := x \leqslant y \text{且} x \neq y$$

定义 1.11. 全序集 $(X, \leqslant)$ 上的序拓扑 $\mathscr{T}_{order}$ 是由子基 $\mathcal{S}$ 生成的拓扑, 其中 $\mathcal{S}$ 由所有形如

$$\left\{x \middle| x < a\right\}, \left\{x \middle| x > a\right\}$$

的集合组成.

不难看出所有形如

$$\left\{x \middle| x < a\right\}, \left\{x \middle| x > a\right\}, \left\{x \middle| a < x < b\right\}$$

的集合组成 $\mathscr{T}_{order}$ 的一个基.

1.8 例子：乘积拓扑

注记. 有点好奇范畴中的乘积, 因为我看到乘积 σ-代数的定义方式和乘积拓扑的定义方式是一样的.

设 $(X_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)$ 是一族拓扑空间. 现在我们在笛卡尔积 $\prod_\alpha X_\alpha$ 上定义乘积拓扑. 我们已经看到通过将例 1.13 中的基 $\mathcal{B}$ 推广到 $\prod_\alpha X_\alpha$ 上, 我们能够在 $\prod_\alpha X_\alpha$ 上定义箱拓扑. 现在我们推广把例 1.13 中的子基来构造 $\prod_\alpha X_\alpha$ 上的乘积拓扑. 注意到对于 $X \times Y$, 如果我们记 $\pi_X : X \times Y \to X$ 为典范投影, 那么 $U \times Y = \pi_X^{-1}(U)$. 一般地, 我们设 $\pi_\beta : \prod_\alpha X_\alpha \to X_\beta$ 为典范投影.

定义 1.12. $\prod_\alpha X_\alpha$ 上的乘积拓扑 $\mathscr{T}_{product}$ 是由子基

$$\mathcal{S} = \bigcup_\beta \left\{\pi_\beta^{-1}(V_\beta) \middle| V_\beta \in \mathscr{T}_\beta\right\}$$

生成的拓扑.

乘积拓扑中的开集是形如 $\prod_\alpha U_\alpha$ 的集合的并, 其中 U_α 是 X_α 中的开集并且仅对于有限个 α 有 $U_\alpha \neq X_\alpha$. 因此对于有限乘积,$\mathscr{T}_{product}$ 和 $\mathscr{T}_{box}$ 是相同的；但对于无限乘积,$\mathscr{T}_{product}$ 严格弱于 $\mathscr{T}_{box}$.

尽管乘积拓扑看起来不像箱拓扑那么自然, 但事实上乘积拓扑更为重要：它有许多良好的性质. 另一方面, 箱拓扑有许多差的性质并且广泛用作反例.

命题 1.13. 对任意 β, 投影映射 $\pi_\beta : \prod_\alpha X_\alpha \to X_\beta$ 是连续映射和开映射, 其中我们赋予 $\prod_\alpha X_\alpha$ 乘积拓扑或箱拓扑.

证明. 由于乘积拓扑弱于箱拓扑, 因此我们只需要对乘积拓扑证明连续性, 对箱拓扑证明开性：

- 对于乘积拓扑,π_β 是连续的因为 $(X_\beta, \mathscr{T}_\beta)$ 中的任意开集 V_β 的原像是 $(\prod_\alpha X_\alpha, \mathscr{T}_{product})$ 中的开集 $\pi_\beta^{-1}(V_\beta)$.
- 对于箱拓扑,π_β 是开的因为对于任意开集 $W \subset \mathscr{T}_{box}$ 和任意 $x \in W$, 存在 $U_\alpha \in \mathscr{T}_\alpha$ 使得 $x \in \prod_\alpha U_\alpha$. 因此 $\pi_\beta(x) \in U_\beta \subset \pi_\beta(W)$.

□

事实上, 乘积拓扑可以由投影映射 π_β 来刻画：

命题 1.14. 乘积拓扑 $\mathscr{T}_{product}$ 是使得每个 π_β 都连续的 $\prod_\alpha X_\alpha$ 上的最弱的拓扑.

证明. 我们已经看到每个 π_β 关于 $\mathscr{T}_{product}$ 确实是连续的. 相反地, 如果每个 π_β 关于某个 $\prod_\alpha X_\alpha$ 上的拓扑 $\mathscr{T}$ 是连续的, 那么每个 $\pi_\beta^{-1}(V_\beta)$ 是 $\mathscr{T}$ 中的开集, 因此 $\mathscr{T}_{product}$ 要弱于 $\mathscr{T}$. □

1.9 乘积拓扑的泛性质

乘积拓扑能够被下列泛性质刻画：

定理 1.15 (乘积拓扑的泛性质)**.** 设 X, X_α 是拓扑空间,$f_\alpha : X \to X_\alpha$ 是映射. 赋予 $\prod_\alpha X_\alpha$ 乘积拓扑. 那么映射

$$f : X \to \prod_\alpha X_\alpha, x \mapsto (f_\alpha(x))$$

是连续的当且仅当每个 $f_\alpha = \pi_\alpha \circ f$ 是连续的. 此外, 乘积拓扑是 $\prod_\alpha X_\alpha$ 上满足此性质的唯一拓扑.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f_\alpha"'] & (\prod_\alpha X_\alpha, \mathscr{T}_{product}) \arrow[d, "\pi_\alpha"] \\ & X_\alpha \end{tikzcd}$$

证明.

- 设 f 是连续的, 那么 $f_\alpha = \pi_\alpha \circ f$ 作为连续映射的复合也是连续的.

- 设 f_α 是连续的, 我们要证 f 是连续的. 我们知道 $\prod_\alpha X_\alpha$ 的一个子基为

$$\mathcal{S} = \left\{\pi_\beta^{-1}(V_\beta)\middle|V_\beta \in \mathscr{T}_\beta\right\},$$

  因此只需证 $f^{-1}(\pi_\beta^{-1}(V_\beta))$ 是连续的. 而 $f^{-1}(\pi_\beta^{-1}(V_\beta))$ 正是 $(\pi_\beta \circ f)^{-1}(V_\beta) = f_\beta^{-1}(V_\beta)$.

- 最后我们要证明乘积拓扑被泛性质唯一刻画. 设 $\mathscr{T}$ 是 $\prod_\alpha X_\alpha$ 上满足泛性质的拓扑.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f_\alpha"'] & (\prod_\alpha X_\alpha, \mathscr{T}) \arrow[d, "\pi_\alpha"] \\ & X_\alpha \end{tikzcd}$$

  - 首先要证明 π_α 是连续的. 取 X 为 $(\prod_\alpha X_\alpha, \mathscr{T})$, 取 f 为恒等映射, 则

$$\begin{tikzcd} (\prod_\alpha X_\alpha, \mathscr{T}) \arrow[r, "id"] \arrow[dr, "\pi_\alpha"'] & (\prod_\alpha X_\alpha, \mathscr{T}) \arrow[d, "\pi_\alpha"] \\ & X_\alpha \end{tikzcd}$$

    id 显然是连续映射, 由泛性质,π_α 也连续.

  -

$$\begin{tikzcd} (\prod_\alpha X_\alpha, \mathscr{T}_{product}) \arrow[r, "id"] \arrow[dr, "\pi_\alpha"'] & (\prod_\alpha X_\alpha, \mathscr{T}) \arrow[d, "\pi_\alpha"] \\ & X_\alpha \end{tikzcd}$$

    因此 $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}_{product}$.

  -

$$\begin{tikzcd} (\prod_\alpha X_\alpha, \mathscr{T}) \arrow[r, "id"] \arrow[dr, "\pi_\alpha"'] & (\prod_\alpha X_\alpha, \mathscr{T}_{product}) \arrow[d, "\pi_\alpha"] \\ & X_\alpha \end{tikzcd}$$

    因此 $\mathscr{T}_{product} \subset \mathscr{T}$.

$\square$

2 映射定义的拓扑

2.1 诱导拓扑

我们从两个观察开始：

- 我们之前刚刚证明了乘积拓扑 $\mathscr{T}_{product}$ 是 $\prod_\alpha X_\alpha$ 上使得投影映射 $\pi_\beta : \prod_\alpha X_\alpha \to (X_\beta, \mathscr{T}_\beta)$ 是连续映射的最弱拓扑.
- 类似地, 设 $(X, \mathscr{T})$ 是拓扑空间,A 是 X 的子集, 那么子空间拓扑 $\mathscr{T}_A$ 就是 A 上使得包含映射 $\iota : A \hookrightarrow X$ 是连续映射的最弱拓扑.

一般地, 我们可以利用映射来构造新的拓扑：

定义 2.1. 设 $\{(Y_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)\}$ 是拓扑空间族, 设

$$\mathcal{F} = \{f_\alpha : X \to (Y_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)\}$$

是一族映射.X 上的 $\mathcal{F}-$ 诱导拓扑, 记作 $\mathscr{T}_{\mathcal{F}}$, 定义为使得所有映射 f_α 是连续映射的最弱拓扑.

注记. 我们需要稍微解释下这个定义：

- 首先, 正如我们上次看到的, 如果我们赋予 X 最强的拓扑, 即离散拓扑, 那么任意的 f_α 都是连续的. 这没什么意思.
- 如果 $\mathscr{T}_\beta$ 是 X 上所有使得每个 f_α 都连续的拓扑, 那么正如我们已经看到的,$\mathscr{T} := \bigcap_\beta \mathscr{T}_\beta$ 是 X 上的拓扑. 此外, 根据构造 f_α 关于 $\mathscr{T}$ 连续. 因此, 存在 X 上唯一的最弱的拓扑使得每个 f_α 都是连续的.

不难找出这个拓扑. 按定义,$\mathscr{T}_{\mathcal{F}}$ 是由子基

$$\mathcal{S}_{\mathcal{F}} = \bigcup_\alpha \left\{ f_\alpha^{-1}(V_\alpha) \middle| V_\alpha \in \mathscr{T}_\alpha \right\}.$$

生成的拓扑. 注意在我们只有一个靶空间 $(Y, \mathscr{T}_Y)$ 和一个映射 $f : X \to (Y, \mathscr{T}_Y)$ 的特殊情况下, 子基

$$\mathcal{S}_f \left\{ f^{-1}(V) \middle| V \in \mathscr{T}_Y \right\}$$

本身便是 X 上的一个拓扑. 所以在这种情况下,

$$\mathscr{T}_f = \left\{ f^{-1}(V) \middle| V \in \mathscr{T}_Y \right\}.$$

通过重复定理 1.23 的证明, 我们有

命题 2.2. 设 Z 是一个拓扑空间, 赋予 X 以 $\mathcal{F}$-诱导拓扑. 那么映射 $f : Z \to X$ 是连续的当且仅当每个 $f_\alpha \circ f : Z \to Y_\alpha$ 是连续的. 此外,$\mathcal{F}$-诱导拓扑是唯一满足此性质的拓扑.

证明.

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f_\alpha \circ f"'] & X \arrow[d, "f_\alpha"] \\ & Y_\alpha \end{tikzcd}$$

- 假设 f 是连续的, 那么 $f_\alpha \circ f$ 作为连续映射的复合也是连续的.
- 假设 $f_\alpha \circ f$ 是连续的, 要证 f 是连续的, 只需对 X 的子基

$$\mathcal{S}_{\mathcal{F}} = \left\{ f_\alpha^{-1}(V_\alpha) \middle| V_\alpha \in \mathscr{T}_\alpha \right\}$$

  证明每个元素的原像 $f^{-1}(f_\alpha^{-1}(V_\alpha)) = (f_\alpha \circ f)^{-1}(V_\alpha)$ 都是开集. 这成立因为 $(f_\alpha \circ f)^{-1}$ 连续.

- 假如 $\mathscr{T}$ 也是 X 上满足此性质的拓扑.
  - 考虑
$$\begin{tikzcd} (X, \mathscr{T}_{\mathcal{F}}) \arrow[r, "Id"] \arrow[dr, "f_\alpha \circ Id = f_\alpha"'] & (X, \mathscr{T}) \arrow[d, "f_\alpha"] \\ & Y_\alpha \end{tikzcd}$$
    因为 $(X, \mathscr{T}_{\mathcal{F}}) \xrightarrow{f_\alpha} Y_\alpha$ 是连续映射, 所以 $(X, \mathscr{T}_{\mathcal{F}}) \xrightarrow{Id} (X, \mathscr{T})$ 是连续映射. 即 $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}_{\mathcal{F}}$.
  - 考虑
$$\begin{tikzcd} (X, \mathscr{T}) \arrow[r, "Id"] \arrow[dr, "f_\alpha \circ Id = f_\alpha"'] & (X, \mathscr{T}) \arrow[d, "f_\alpha"] \\ & Y_\alpha \end{tikzcd}$$
    因为 $(X, \mathscr{T}) \xrightarrow{Id} (X, \mathscr{T})$ 是连续映射, 所以 $(X, \mathscr{T}) \xrightarrow{f_\alpha} Y_\alpha$ 是连续映射.
  - 考虑
$$\begin{tikzcd} (X, \mathscr{T}) \arrow[r, "Id"] \arrow[dr, "f_\alpha \circ Id = f_\alpha"'] & (X, \mathscr{T}_{\mathcal{F}}) \arrow[d, "f_\alpha"] \\ & Y_\alpha \end{tikzcd}$$
    因为 $(X, \mathscr{T}) \xrightarrow{f_\alpha} Y_\alpha$ 是连续映射, 所以 $(X, \mathscr{T}) \xrightarrow{Id} (X, \mathscr{T}_{\mathcal{F}})$ 是连续映射. 即 $\mathscr{T}_{\mathcal{F}} \subset \mathscr{T}$.

□

2.2 诱导拓扑的更多例子

我们已经看到子空间拓扑和乘积拓扑都可以被解释为诱导拓扑. 下面我们列举额外几个例子:

例 2.3 (重新回到逐点收敛拓扑)**.** 设 $X = \mathcal{M}([0,1], \mathbb{R})$ 是 $[0,1]$ 上所有实值函数的全体构成的空间. 对于任意的 $x \in [0,1]$, 设 $ev_x : X \to \mathbb{R}$ 是取值映射

$$ev_x(f) := f(x).$$

那么由 $\left\{ ev_x \middle| x \in [0,1] \right\}$ 生成的诱导拓扑就是逐点收敛拓扑.

证明. □

2.3 余诱导拓扑

映射不仅能够用来将拓扑从靶空间拉回到源空间, 还能够用来将拓扑从源空间推到靶空间. 准确地说, 设 $(X_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)$ 是一族拓扑空间,Y 是一个集合,$f_\alpha : X_\alpha \to Y$ 是一族映射. 我们还是赋予 Y 一个拓扑使得每个 f_α 都是连续的. 另一方面我们不希望使用 Y 上的平凡拓扑, 它太弱使得从任意拓扑空间到 Y 的任意映射都是连续的. 所以问题是赋予 Y 一个使得 f_α 连续的最强拓扑. 因此自然地定义

定义 2.4 (余诱导拓扑)**.** *设 $(X_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)$ 是一族拓扑空间, 设 Y 是一个集合,$\mathcal{F} = \{f_\alpha : X_\alpha \to Y\}$ 是一族映射.Y 上使得每个 f_α 都连续的最强拓扑称为 $\mathcal{F}$ 诱导的余诱导拓扑.*

我们一定会关心：这样的最强的拓扑存在吗？注意到在定义 $\mathcal{F}$ 诱导的最弱的拓扑时, 我们利用了 X 上的拓扑族的交仍是 X 上的拓扑这一事实. 一般地,X 上的拓扑族的并并不是 X 上的拓扑. 但是, 如果我们仔细思考这个问题, 我们会发现我们面临的依旧是和最弱拓扑时类似的情况：我们不是在做拓扑族的并, 而是拓扑族的交！这是因为我们有一族限制！

下面的定理几乎是直接的：

定理 2.5. *设 $(X_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)$ 是一族拓扑空间,$f_\alpha : X_\alpha \to Y$ 是一族映射. 那么由 $\{f_\alpha\}$ 诱导的 Y 上的余诱导拓扑就是*

$$\mathscr{T} = \bigcap_\alpha \left\{ V \subset Y \middle| f_\alpha^{-1}(V) \in \mathscr{T}_\alpha \right\}.$$

正如诱导拓扑的情形, 余诱导拓扑也可以由下面的泛性质刻画：

命题 2.6. *设 Z 是拓扑空间. 赋予 Y 以 $\mathcal{F}$ 余诱导拓扑. 那么映射 $f : Y \to Z$ 是连续的当且仅当每个映射 $f \circ f_\alpha : X_\alpha \to Z$ 是连续的. 此外,$\mathcal{F}$ 诱导的余诱导拓扑是满足此性质的唯一拓扑.*

证明.

$$\begin{tikzcd} X_\alpha \arrow[r, "f_\alpha"] \arrow[dr, "f\circ f_\alpha"'] & Y \arrow[d, "f"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

- 假设 f 是连续的, 那么 $f \circ f_\alpha$ 作为连续映射的复合也是连续的.
- 假设 $f \circ f_\alpha$ 是连续的, 要证 f 是连续的, 即对任意 $U \in \mathscr{T}_Z$,$f^{-1}(U)$ 是 Y 中的开集. 按定义, 这是说对任意的 α,$f_\alpha^{-1}(f^{-1}(U))$ 是 X_α 中的开集, 即 $(f \circ f_\alpha)^{-1}(U)$ 是 X_α 中的开集, 这成立因为 $f \circ f_\alpha$ 是连续的.
- 假如 $\mathscr{T}$ 也是 Y 上满足此性质的拓扑.
  - 考虑

    $$\begin{tikzcd} X_\alpha \arrow[r, "f_\alpha"] \arrow[dr, "id\circ f_\alpha"'] & (Y, \mathscr{T}) \arrow[d, "id"] \\ & (Y, \mathscr{T}_{\mathcal{F}}) \end{tikzcd}$$

    因为 $X_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} (Y, \mathscr{T}_{\mathcal{F}})$ 是连续映射, 所以 $(Y, \mathscr{T}) \xrightarrow{id} (Y, \mathscr{T}_{\mathcal{F}})$ 是连续映射. 即 $\mathscr{T}_{\mathcal{F}} \subset \mathscr{T}$.
  - 考虑

    $$\begin{tikzcd} X_\alpha \arrow[r, "f_\alpha"] \arrow[dr, "id\circ f_\alpha"'] & (Y, \mathscr{T}) \arrow[d, "id"] \\ & (Y, \mathscr{T}) \end{tikzcd}$$

因为 $(Y,\mathscr{T}) \xrightarrow{id} (Y,\mathscr{T})$ 是连续映射, 所以 $X_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} (Y,\mathscr{T})$ 是连续映射.

– 考虑

$$\begin{tikzcd} X_\alpha \arrow[r, "f_\alpha"] \arrow[dr, "id\circ f_\alpha"'] & (Y,\mathscr{T}_\mathcal{F}) \arrow[d, "id"] \\ & (Y,\mathscr{T}) \end{tikzcd}$$

因为 $X_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} (Y,\mathscr{T})$ 是连续映射, 所以 $(Y,\mathscr{T}_\mathcal{F}) \xrightarrow{id} (Y,\mathscr{T})$ 是连续映射. 即 $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}_\mathcal{F}$.

□

2.4 例子

3 PSet03-1

(1)[Universality of the induced and co-induced topologies]
Prove Proposition 2.3 and Proposition 2.8 in today's notes.

命题 3.1. 设 Z 是一个拓扑空间, 赋予 X 以 $\mathcal{F}$-诱导拓扑. 那么映射 $f: Z \to X$ 是连续的当且仅当每个 $f_\alpha \circ f: Z \to Y_\alpha$ 是连续的. 此外,$\mathcal{F}$-诱导拓扑是唯一满足此性质的拓扑.

证明.

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f_\alpha \circ f"'] & X \arrow[d, "f_\alpha"] \\ & Y_\alpha \end{tikzcd}$$

- 假设 f 是连续的, 那么 $f_\alpha \circ f$ 作为连续映射的复合也是连续的.
- 假设 $f_\alpha \circ f$ 是连续的, 要证 f 是连续的, 只需对 X 的子基

  $$\mathcal{S}_{\mathcal{F}} = \left\{ f_\alpha^{-1}(V_\alpha) \middle| V_\alpha \in \mathscr{T}_\alpha \right\}$$

  证明每个元素的原像 $f^{-1}(f_\alpha^{-1}(V_\alpha)) = (f_\alpha \circ f)^{-1}(V_\alpha)$ 都是开集. 这成立因为 $(f_\alpha \circ f)^{-1}$ 连续.
- 假如 $\mathscr{T}$ 也是 X 上满足此性质的拓扑.
  - 考虑

    $$\begin{tikzcd} (X, \mathscr{T}_{\mathcal{F}}) \arrow[r, "Id"] \arrow[dr, "f_\alpha \circ Id = f_\alpha"'] & (X, \mathscr{T}) \arrow[d, "f_\alpha"] \\ & Y_\alpha \end{tikzcd}$$

    因为 $(X, \mathscr{T}_{\mathcal{F}}) \xrightarrow{f_\alpha} Y_\alpha$ 是连续映射, 所以 $(X, \mathscr{T}_{\mathcal{F}}) \xrightarrow{Id} (X, \mathscr{T})$ 是连续映射. 即 $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}_{\mathcal{F}}$.
  - 考虑

    $$\begin{tikzcd} (X, \mathscr{T}) \arrow[r, "Id"] \arrow[dr, "f_\alpha \circ Id = f_\alpha"'] & (X, \mathscr{T}) \arrow[d, "f_\alpha"] \\ & Y_\alpha \end{tikzcd}$$

    因为 $(X, \mathscr{T}) \xrightarrow{Id} (X, \mathscr{T})$ 是连续映射, 所以 $(X, \mathscr{T}) \xrightarrow{f_\alpha} Y_\alpha$ 是连续映射.
  - 考虑

    $$\begin{tikzcd} (X, \mathscr{T}) \arrow[r, "Id"] \arrow[dr, "f_\alpha \circ Id = f_\alpha"'] & (X, \mathscr{T}_{\mathcal{F}}) \arrow[d, "f_\alpha"] \\ & Y_\alpha \end{tikzcd}$$

    因为 $(X, \mathscr{T}) \xrightarrow{f_\alpha} Y_\alpha$ 是连续映射, 所以 $(X, \mathscr{T}) \xrightarrow{Id} (X, \mathscr{T}_{\mathcal{F}})$ 是连续映射. 即 $\mathscr{T}_{\mathcal{F}} \subset \mathscr{T}$.

□

命题 3.2. 设 Z 是拓扑空间. 赋予 Y 以 $\mathcal{F}$ 余诱导拓扑. 那么映射 $f: Y \to Z$ 是连续的当且仅当每个映射 $f \circ f_\alpha: X_\alpha \to Z$ 是连续的. 此外,$\mathcal{F}$ 诱导的余诱导拓扑是满足此性质的唯一拓扑.

证明.

$$\begin{tikzcd} X_\alpha \arrow[r, "f_\alpha"] \arrow[dr, "f\circ f_\alpha"'] & Y \arrow[d, "f"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

- 假设 f 是连续的, 那么 $f \circ f_\alpha$ 作为连续映射的复合也是连续的.
- 假设 $f \circ f_\alpha$ 是连续的, 要证 f 是连续的, 即对任意 $U \in \mathscr{T}_Z$,$f^{-1}(U)$ 是 Y 中的开集. 按定义, 这是说对任意的 α,$f_\alpha^{-1}(f^{-1}(U))$ 是 X_α 中的开集, 即 $(f \circ f_\alpha)^{-1}(U)$ 是 X_α 中的开集, 这成立因为 $f \circ f_\alpha$ 是连续的.
- 假如 $\mathscr{T}$ 也是 Y 上满足此性质的拓扑.
  - 考虑
    $$\begin{tikzcd} X_\alpha \arrow[r, "f_\alpha"] \arrow[dr, "id\circ f_\alpha"'] & (Y, \mathscr{T}) \arrow[d, "id"] \\ & (Y, \mathscr{T}_\mathcal{F}) \end{tikzcd}$$
    因为 $X_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} (Y, \mathscr{T}_\mathcal{F})$ 是连续映射, 所以 $(Y, \mathscr{T}) \xrightarrow{id} (Y, \mathscr{T}_\mathcal{F})$ 是连续映射. 即 $\mathscr{T}_\mathcal{F} \subset \mathscr{T}$.
  - 考虑
    $$\begin{tikzcd} X_\alpha \arrow[r, "f_\alpha"] \arrow[dr, "id\circ f_\alpha"'] & (Y, \mathscr{T}) \arrow[d, "id"] \\ & (Y, \mathscr{T}) \end{tikzcd}$$
    因为 $(Y, \mathscr{T}) \xrightarrow{id} (Y, \mathscr{T})$ 是连续映射, 所以 $X_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} (Y, \mathscr{T})$ 是连续映射.
  - 考虑
    $$\begin{tikzcd} X_\alpha \arrow[r, "f_\alpha"] \arrow[dr, "id\circ f_\alpha"'] & (Y, \mathscr{T}_\mathcal{F}) \arrow[d, "id"] \\ & (Y, \mathscr{T}) \end{tikzcd}$$
    因为 $X_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} (Y, \mathscr{T})$ 是连续映射, 所以 $(Y, \mathscr{T}_\mathcal{F}) \xrightarrow{id} (Y, \mathscr{T})$ 是连续映射. 即 $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}_\mathcal{F}$.

□

(2)[Neighborhood basis]

Like a basis, we can define a neighborhood basis (or neighborhood base) as follows: A family $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{N}(x)$ of neighborhoods of x is called a neighborhood basis at x if for any $N \in \mathcal{N}(x)$, there exists $B \in \mathcal{B}(x)$ such that $B \subset N$.

(a) Express $\mathcal{N}(x)$ in terms of $\mathcal{B}(x)$.

(b) Define a conception of neighborhood sub-basis.

(c) Write down a theorem that characterize the continuity of a map of f at a point x via neighborhood bases and via neighborhood sub-basis, and prove your theorem.

证明.

(a)

$$\mathcal{N}_{\mathcal{B}} = \{A \cup B | A \in \mathcal{P}(X), B \in \mathcal{B}(x)\}.$$

(b) x 的邻域族 $\mathcal{S}(x) \subset \mathcal{N}(x)$ 被称作 x 处的邻域子基如果对任意 $N \in \mathcal{N}(x)$, 存在 $S_1, \cdots, S_n \in \mathcal{S}(x)$ 使得 $\bigcap_{i=1}^{n} S_i \subset N$.

(c)

定理 3.3. *$f : X \to Y$ 在 $x_0 \in X$ 处连续当且仅当对任意 $f(x_0)$ 的邻域 N, 存在 $B \in \mathcal{B}(x)$ 使得 $B \subset f^{-1}(N)$.*

证明.

- 设 f 在 x_0 处连续, 则对任意 $f(x_0)$ 的邻域 N, 存在 x_0 的邻域 M 使得 $M \subset f^{-1}(N)$, 按定义存在 $B \in \mathcal{B}(x)$ 使得 $B \subset M \subset f^{-1}(N)$.
- 因为 $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{N}(x)$, 所以 f 连续.

□

定理 3.4. *$f : X \to Y$ 在 $x_0 \in X$ 处连续当且仅当对任意 $f(x_0)$ 的邻域 N, 存在 $S \in \mathcal{S}(x)$ 使得 $S \subset f^{-1}(N)$.*

证明.

-
- 因为 $\mathcal{S}(x) \subset \mathcal{N}(x)$, 所以 f 连续.

□

□

(3)[Topologies on $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$]
Consider the space of sequences of real numbers,

$$X = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(x_1, x_2, \cdots) \big| x_n \in \mathbb{R}\}.$$

On X we have defined three topologies:the box topology $\mathscr{T}_{box}$, the product topology $\mathscr{T}_{product}$, and the "uniform topology" $\mathscr{T}_{uniform}$ induced from the uniform metric

$$d_{uniform}((x_n), (y_n)) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \min(|x_n - y_n|, 1).$$

(a) Prove:$\mathscr{T}_{product} \subset \mathscr{T}_{uniform} \subset \mathscr{T}_{box}$.

(b) One can also regard every element $(x_1, x_2, \cdots)$ in X as a map

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad n \mapsto x_n$$

and thus identify X with the spaces of maps $\mathcal{M}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. Define the pointwise convergence topology $\mathscr{T}_{p.c.}$ on X, and prove $\mathscr{T}_{p.c.} = \mathscr{T}_{product}$.

(c) Fix two elements $(a_1, a_2, \cdots)$ and $(b_1, b_2, \cdots)$ in X, and define a map

$$f : X \to X, (x_1, x_2, \cdots) \mapsto (a_1x_1 + b_1, a_2x_2 + b_2, \cdots).$$

Prove that if we endow X with the product topology, then f is continuous. What if we endow X with the box topology?

证明. 这三个拓扑分别有基：

$$\mathcal{B}_{box} = \left\{\prod_{n\in\mathbb{N}}(x_n - \varepsilon_n, x_n + \varepsilon_n)\right\}$$

$$\mathcal{B}_{product} = \left\{\prod_{n\in\mathbb{N}} U_n \middle| U_n \in \mathscr{T}_{\mathbb{R}}, \text{有限个形如}(x_i - \varepsilon_i, x_i + \varepsilon_i), \text{其余都是}\mathbb{R}\right\}$$

$$\mathcal{B}_{uniform} = \left\{B((x_n), \varepsilon)\middle|(x_n) \in X, \varepsilon \in \mathbb{R}\right\}, B((x_n), \varepsilon) = \begin{cases}\left\{(y_n)\middle||x_n - y_n| < \varepsilon, n \in \mathbb{N}\right\} \backslash \partial B((x_n), \varepsilon) & \varepsilon \leqslant 1 \\ X & \varepsilon > 1\end{cases}$$

乘积拓扑有子基

$$\mathcal{S}_{product} = \left\{\prod_{n\in\mathbb{N}} U_n \middle| U_n \in \mathscr{T}_{\mathbb{R}}, \text{只有一个形如}(x_i - \varepsilon_i, x_i + \varepsilon_i), \text{其余都是}\mathbb{R}\right\}$$

(a) 要证 $\mathscr{T}_{product} \subset \mathscr{T}_{uniform}$, 只需证 $\mathcal{B}_{product}$ 中元素都是 $\mathscr{T}_{uniform}$ 中开集. 任取 $(y_n) \in \prod_{n\in\mathbb{N}} U_n$, 存在一个 $\varepsilon \leqslant 1$ 使得 $(y_i - \varepsilon, y_i + \varepsilon) \subset U_i$, 这是因为 U_n 中只有有限个形如 $(x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon)$. 从而 $(y_n) \in B((y_n), \varepsilon) \subset \prod_{n\in\mathbb{N}} U_n$.

要证 $\mathscr{T}_{uniform} \subset \mathscr{T}_{box}$, 只需证 $\mathcal{B}_{uniform}$ 中元素都是 $\mathscr{T}_{box}$ 中开集.X 显然是 $\mathscr{T}_{box}$ 中开集. 对于 $\left\{(y_n)\middle||x_n - y_n| < \varepsilon, n \in \mathbb{N}\right\} \backslash \partial B((x_n), \varepsilon)$, 容易看出 $\left\{(y_n)\middle||x_n - y_n| < \varepsilon, n \in \mathbb{N}\right\} \in \mathcal{B}_{box}$ 从而是 $\mathscr{T}_{box}$ 中开集. **但我不会证** $\partial B((x_n), \varepsilon)$ 是 $\mathscr{T}_{box}$ 中闭集.

(b) $\mathscr{T}_{p.c.}$ 有子基

$$\mathcal{S}_{p.c.} = \left\{\omega(f, n, \varepsilon)\middle| f \in \mathcal{M}(\mathbb{N}, \mathbb{R}), n \in \mathbb{N}\right\}$$

$\mathcal{S}_{p.c.}$ 中的元素 $\omega(f, i, \varepsilon)$ 与 $\mathcal{S}_{product}$ 中的元素 $\prod \mathbb{R} \times \cdots \mathbb{R} \times (f(n) - \varepsilon, f(n) + \varepsilon) \times \mathbb{R} \cdots$ 有着一一对应. 容易看出 $\mathcal{S}_{p.c.} = \mathcal{S}_{product}$, 因此它们生成的拓扑也是相同的.

(c) 要证明 f 连续, 只要证明基中元素的原像是开集.

设 $a_ix_i + b_i \in \mathbb{R}$, 则 $x_i \in \mathbb{R}$.

设 $a_ix_i + b_i \in (c_i, d_i)$,

- 若 $a_i \neq 0$, 则 $x_i \in \dfrac{1}{a_i}(c_i - b_i, d_i - b_i)$
- 若 $a_i = 0$, 则 $x_i \in \mathbb{R}$ 或不存在 x_i.

由此可以看出, 基中元素 $\prod_{n\in\mathbb{N}} V_n$ 的原像要么是空集, 要么形如 $\prod_{n\in\mathbb{N}} U_n$, 并且 U_n 中非 $\mathbb{R}$ 的个数要小于 V_n 中非 $\mathbb{R}$ 的个数, 从而有限, 从而 $\prod_{n\in\mathbb{N}} U_n$ 也是基中元素进而是开集. 因此 f 连续.

当我们赋予 X 乘积拓扑, 因为两侧的拓扑都变细了, 与上面相同的论证可知,f 依旧连续.

□

(4)[Countable basis]

We say a topological space $(X, \mathscr{T})$ is second countable if it admits a basis $\mathcal{B}$ which contains countably many sets.

(a) Prove:$(\mathbb{R}, \mathscr{T}_{usual})$ is second countable.

(b) Prove:$(\mathbb{R}, \mathscr{T}_{Sorgenfrey})$ is not second countable.

(c) Prove:$(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathscr{T}_{product})$ is second countable, while $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathscr{T}_{box})$ is not.

证明.

(a) $\mathcal{B} = \big\{(a, b)\big|a, b \in \mathbb{Q}\big\}$.

(b) $\mathscr{T}_{Sorgenfrey} = \big\{U \subset \mathbb{R}\big|\forall x \in U, \exists \varepsilon > 0 \text{ s.t. } [x, x+\varepsilon) \subset U\big\}$.
按定义, 所有形如 $[x, x+\varepsilon)$ 的区间是 $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_{Sorgenfrey})$ 中的开集. 设 $\mathcal{B}$ 是 $\mathscr{T}_{Sorgenfrey}$ 的基. 按定义, 对 $x_1 \in [x_1, x_1+\varepsilon_1)$, 存在一个 $B_1 \subset \mathcal{B}$ 使得 $x_1 \in B_1 \subset [x_1, x_1+\varepsilon_1)$. 断言, 对于 $x_1 \neq x_2$,$B_1 \neq B_2$. 不妨设 $x_1 < x_2$, 则 $x_1 \in B_1$ 但 $x_1 \notin B_2$, 因此 $B_1 \neq B_2$. 从而 $\mathcal{B}$ 不可数.

(c)
- $\mathcal{B} = \left\{\prod_{n\in\mathbb{N}} U_n \middle| U_i = (a_i, b_i), a_i, b_i \in \mathbb{Q}, i = 1, 2, \cdots, m, \text{其余} U_j = \mathbb{R}\right\}$.
-

□

Chapter 4

商拓扑

1 商拓扑

1.1 商拓扑

上一次我们介绍了几种在抽象的拓扑空间上构造拓扑的抽象方式. 今天我们将介绍另一种构造拓扑空间的方式：商拓扑.

事实上商拓扑并不是构造拓扑的全新方式. 它仅仅是我们上次介绍过的余诱导拓扑的简单特殊情况. 但是, 因为它非常的具体且“可视化”, 它被广泛用于几何与代数拓扑中.

设 X 是一个拓扑空间,Y 是任意集合,$q : X \to Y$ 是一个满射. 称 Y 上的余诱导拓扑为 q 诱导的商拓扑.

如果 X 和 Y 都是拓扑空间, 称映射 $q : X \to Y$ 是商映射如果它是满射并且 Y 的拓扑是由 q 诱导的商拓扑. 一旦知道 q 是满射, 说它是商映射也就是在说 V 是 Y 中开集当且仅当 $q^{-1}(V)$ 是 X 中开集. 从定义立即知道每个商映射都是连续映射.

给定一个商映射, 我们称 $p^{-1}(y)$ 是 p 在点 $y \in Y$ 上的纤维.

注意：按定义, 商映射的复合还是商映射.

有一种构造商映射/商拓扑的经典方式：给定一个拓扑空间 $(X, \mathscr{T}_X)$ 和 X 上的一个等价关系 $\sim$. 那么我们可以得到一个由等价类组成的抽象空间 $Y = X/\sim$ 和一个自然投影 $p : X \to X/\sim, x \mapsto [x]$. 在这种情况下, 每个纤维是一个等价类. 注意到由映射诱导的商和由等价关系诱导的商事等价的：给定一个等价关系, 我们有一个自然投射, 它是满射；给定一个满射 $f : X \to Y$, 它诱导了 X 上的一个等价关系 $x \sim y \iff f(x) = f(y)$.

1.2 泛性质

万有性质. d

推论 1.1. *$p(X, \mathscr{T}_X) \to (Y, \mathscr{T}_Y)$ 商映射,$f : (X, \mathscr{T}_X) \to (Z, \mathscr{T}_Z)$ 连续. 满足 $f =$ 常数在每一个 fiber 上. 那么 f 诱导了一个自然的连续映射 $\bar{f} : Y \to Z$.*

1.3 实射影空间

1.4 构造：在同一个空间中将一个点粘到另一个点

1.5 构造：

1.6 构造：

1.7 构造：锥空间和

1.8 构造：映射柱

2 群作用诱导的商拓扑

2.1 同胚群

对称在数学的各个分支中扮演着重要的角色, 用来描述对称的数学语言就是群.

定义 2.1. 设 X 是一个拓扑空间, 令

$$\mathrm{Hom}(X) = \{f\colon X \to X \text{是同胚}\}.$$

容易验证, 在通常的映射的复合下,$\mathrm{Hom}(X)$ 构成一个群, 称作 X 的同胚群.

所以任给拓扑空间 X, 我们天然地有一个群来描述 X 在拓扑范畴中的对称性.

2.2 群作用

命题 2.2. 设 X 是拓扑空间, 群 $G \curvearrowright X$, 那么商映射 $\pi\colon X \to X/G$ 是开映射.

证明. 对任意 $U \subset X$, 有 $\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup\limits_{g\in G} gU$.

如果 U 是开集, 因为 $x \mapsto gx$ 是同胚, 所以 gU 是开集, 从而 $\pi^{-1}(\pi(U))$ 是开集.

由商拓扑定义,$\pi(U)$ 是开集, 从而 π 是开映射. □

注记. 所以群 G 在拓扑空间 X 上的一个作用是一个群同胚

$$\tau : G \to \mathrm{Hom}(X),$$

即对任意元素 $g \in G$ 指定一个同胚 $\tau_g : X \to X$, 满足

$$\tau_g \circ \tau_h = \tau_{gh}, \quad \forall g, h \in G.$$

注意到我们总可以假定 τ 是一个单射. 否则我们总可以将 G 替换为 $G/\ker(\tau)$, 以显然的方式作用在 X 上. 这样的一个作用称为一个忠实作用.

2.3 轨道和轨道空间

定义 2.3. 给定一个群 G 在 X 上的作用,$x \in X$ 的轨道是集合

$$G \cdot x := \{g \cdot x \big| g \in G\}.$$

我们将看到在下面的许多例子中轨道都是非常简单的. 这里我们给出一个轨道非常复杂的例子:

例 2.4. 考虑 $\mathbb{S}^1$ 作用在 $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ 上通过

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \cdot (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}) := (\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\alpha)}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\sqrt{2}\alpha)}).$$

那么它的轨道是环面 $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ 上的一条“稠密曲线”.

我们可以在 X 上的等价关系通过

$$x_1 \sim x_2 \Longleftrightarrow \exists\, g \in G \text{ s.t. } x_1 = g \cdot x_2.$$

换句话说,X 中的两个元素是等价的当且仅当它们处在同一个轨道中. 容易验证这是一个等价关系.

定义 2.5. 给定群 G 在拓扑空间 X 上的一个作用, 轨道空间被定义为商空间 $X/G = X/\sim$.

所以按定义, 轨道空间是"轨道的空间", 赋予商拓扑.

例 2.6. 考虑 $\mathbb{R}_{>0}$ 作为乘法群由乘法作用在 $\mathbb{R}$ 上, 即

$$a \cdot x := ax.$$

那么这里有三个轨道 : $\mathbb{R}_{>0}$,$\{0\}$,$\mathbb{R}_{<0}$. 作为结果, 轨道空间由三个元素组成,$\{+, 0, -\}$, 并且轨道空间上的拓扑是

$$\{\varnothing, \{+\}, \{-\}, \{+, -\}, \{+, 0, -\}\}.$$

2.4 例子

2.5 例子：Hopf 纤维丛

3 PSet03-2

(2)[Cone and suspension of $\mathbb{S}^n$]

Prove the following by construcing a homeomorphism for each pair of spaces.

(a) $C(\mathbb{S}^n) \simeq B^{n+1}$

(b) $S(\mathbb{S}^n) \simeq \mathbb{S}^{n+1}$

(c) $B^n/\mathbb{S}^{n-1} \simeq \mathbb{S}^n$.

证明.

(a)

(b)

(c)

□

(4)[Quotient map v.s. open/closed map]

(a) Suppose $p : X \to Y$ is a surjective continuous map. Prove: If p is either open or closed, then it is a quotient map.

(b) Construct a quotient map that is neither open nor closed.

(c) Let $SO(n)$ be the special orthogonal group. Define a map

$$f : SO(n) \to \mathbb{S}^{n-1}, \quad A \mapsto Ae_1,$$

where $e_1 = (0, \cdots, 0, 1)$ is the "north pole vector" on $\mathbb{S}^{n-1}$.

(i) Prove:f is surjective, continuous and open, and thus is a quotient map.

(ii) Consider the natural (right) action of $SO(n-1)$ on $SO(n)$ by

$$B \cdot A := A \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \forall B \in SO(n-1), A \in SO(n).$$

Prove: the orbits of this action are the fibers of the quotient map f.

(iii) Conclude that $SO(n)/SO(n-1) \simeq \mathbb{S}^{n-1}$.

证明.

(c) (i)
- 对任意列向量 $e \in \mathbb{S}^{n-1}$, 将 e 扩充为 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基, 让他们构成 A 的各列, 并且让 e 是最后一列. 倘若 $|A| = -1$, 则给 A 的第一列添一个负号. 如此构造出来的 $A \in SO(n)$ 满足 $Ae_1 = e$. 因此 f 是满射.
- $|A_1e_1 - A_2e_1| = |A_1 - A_2|$, 因此 f 是 Lipschitz 映射从而是连续映射.
-

(ii)

(iii)

□

Chapter 5

点的位置：极限点、闭包、内部和边界

1 闭集和极限点

- 如果你去思考一个集合是闭集的充要条件, 你会发现极限点是一个自然被引入的概念. 假设 A 不是闭集, 那么 A^c 不是开集, 那么存在 $x \in A^c$ 使得对任意开集 U 满足 $x \in U$, 成立 $U \cap A \neq \varnothing$.
- 闭集具有良好的分离性质. 对闭集和闭集外的一点, 总能够找到一个开集（就可以取为闭集的补！我们能否找到一个更小的开集?）把该点包起来并且与闭集无交. 这就是为什么该点既不是闭集的序列极限也不是闭集的极限点.
- 只要拓扑空间的分离性质不太差, 独点集就是闭集, 并且它的极限点是空集. 但这并不是说孤立点不在集合的极限点中发挥作用, 比如 $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ 有极限点 0 但它的每个点都是孤立点.
- 当拓扑空间是第一可数的, 一个集合是闭集当且仅当它包含所有的序列极限. 这句话默认了两处全空间 X, 一处是闭集是相对 X 的闭集, 一处是序列极限是 X 中的序列极限.

命题 1.1. *A 中非最终常值序列的序列极限（在 X 中的极限）是 A 的极限点.*

证明. 设 $x \in X$ 是 A 中非最终常值序列 $\{a_n\}$ 的序列极限, 对于任意包含 x 的开集 U, 存在 N 使得只要 $n > N$,$a_n \in U$. 因为 $\{a_n\}$ 不是最终常值序列, 因此 $U \cap A$ 至少有两个元素, 至少有一个元素不是 x, 因此 $A \cap U \setminus \{x\} \neq \varnothing$, 因此 x 是 A 的极限点. □

命题 1.2. *设 X 是第一可数空间,$x \in X$ 是 A 的极限点, 那么存在一列点 $\{a_n\}$ 收敛到 x.*

证明. 因为 X 是第一可数的, 存在 x 的一族递减开邻域基 $U_1 \supset U_2 \supset \cdots \supset U_n \supset \cdots$.

因为 x 是 A 的极限点, 所以 $A \cap U_n \setminus \{x\} \neq \varnothing$.

在 $A \cap U_n \setminus \{x\}$ 中任选一个元素 a_n 组成序列 $\{a_n\}$, 断言它收敛于 x.

值得注意的是, 这里用到了可数选择公理.

对于任意包含 x 的开集 U, 由邻域基的定义, 存在 N, 使得 $U_N \subset U$.

由我们的构造, 对于 $n > N$, 也有 $U_n \subset U$, 从而对于 $n \geqslant N$,$a_n \in U$, 即 $\{a_n\}$ 收敛于 x. □

1.1 开集和闭集

设 $(X, \mathscr{T})$ 是拓扑空间. 那么 X 中的开集就是那些 $\mathscr{T}$ 中的元素, 而 X 中的闭集是补集是开集的集合. 注意一般来说子集 $A \subset X$ 可以是开的、闭的、即开又闭的或既不开又不闭的.

定义 1.3. 一个集合称为是闭开的, 如果它即开又闭.

例如, 在任何拓扑空间中,$\varnothing$ 和 X 总是闭开的. 对于离散拓扑 $\mathscr{T}_{discrete}$, 任意子集都是闭开的.

我们另外探索两个例子：

例 1.4. 在实直线中

1.2 一个反例

1.3 度量空间中闭集的刻画

1.4 拓扑空间中的闭集

1.5 补救：可数邻域基

1.6 极限点

1.7 用极限点刻画闭集

2 闭包、内部与边界

- 设 $A \subset Y \subset X$. 问 $\overline{A}_Y$ 和 $\overline{A}_X$ 有什么样的关系？
  - 首先, 肯定有一些在 X 中但不在 Y 中的点是 A 的极限点. 这些点会被新添加进来.
  - 一个关键的问题是,Y 中是 A 的极限点的点到了 X 中还是不是 A 的极限点.
    * 是！本来相交非空, 换一个更大的集合来交当然更（事实上不更）非空！
  - 另一个关键的问题是,Y 中不是 A 的极限点的点到了 X 中会不会是 A 的极限点.
    * 不会！虽然开集变大了但是变大的部分在 Y 外面当然不会与 A 相交.
  - 综上所述,$\overline{A}_Y \subset \overline{A}_X$,$\overline{A}_X \cap Y = \overline{A}_Y$.

2.1 子集的闭包

2.2 闭包的性质

2.3 局部有限集的并的闭包

设 $\{A_\alpha\}$ 是一族子集. 那么每个 $\overline{A_\alpha} \subset \overline{\bigcup_\alpha A_\alpha}$ 从而

$$\bigcup_\alpha \overline{A_\alpha} \subset \overline{\bigcup_\alpha A_\alpha}.$$

一般地,$\bigcup_\alpha \overline{A_\alpha} \neq \overline{\bigcup_\alpha A_\alpha}$. 例如, 在 $\mathbb{R}$ 中, 我们有 $\bigcup_{r\in\mathbb{Q}} \overline{\{r\}} \neq \overline{\bigcup_{r\in\mathbb{Q}} \{r\}}$. 原因是相当明显的：有太多的集合 $\{r\}$ 在 $\mathbb{R}$ 的每个开区间里. 这促使我们引入以下定义以挽救“闭包的并 = 并的闭包”这个事实：

定义 2.1. *X 中的子集族 $\{A_\alpha\}$ 被称作局部有限的如果对任意 $x \in X$, 存在开集 U_x 使得 $x \in U_x$ 满足 $A_\alpha \cap U_x \neq \varnothing$ 只对有限多个 α 成立.*

命题 2.2. *如果 $\mathscr{A}$ 是局部有限的集族, 那么*

$$\overline{\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A} = \bigcup_{A\in\mathscr{A}} \overline{A}.$$

证明. 我们只需要证明在局部有限的假设下,$\overline{\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A} \subset \bigcup_{A\in\mathscr{A}} \overline{A}$.

所以我们任取 $x \in \overline{\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A}$. 按局部有限的定义, 存在 x 的一个开邻域 U_x 使得 U_x 与 $\mathscr{A}$ 中的有限个 A 相交. 不失一般性, 将这些 A 记作 $A_1, \cdots, A_m$. 那么我们一定有

$$x \in \overline{A_1} \cup \cdots \cup \overline{A_m} \subset \bigcup_{A\in\mathscr{A}} \overline{A},$$

否则 $U_x \backslash \bigcup_{i=1}^m \overline{A_i}$ 是 x 的一个与 $\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A$ 不交的开邻域, 矛盾. □

2.4 用闭包刻画连续性

2.5 子集的内部

2.6 内部与闭包的对偶

2.7 内部的性质

2.8 稠密集与无处稠密集

利用闭包和内部, 我们能够定义

定义 2.3. 设 A 是拓扑空间 X 的子集.

(1) 称 A 在 X 中是稠密的如果 $\overline{A}=X$.

(2) 称 A 在 X 中是无处稠密的如果 $\mathring{\overline{A}}=\varnothing$.

- 一般来说,A 是稠密的不代表 A^c 是无处稠密的,

$$\overline{A}=X\Longleftrightarrow(\overline{A})^c=\varnothing\Longleftrightarrow(\mathring{A^c})=\varnothing$$

但是, 当 A 是开集时,A^c 是闭集,$A^c=\overline{A^c}$, 此时 A 的稠密性等价于 A^c 的无处稠密性.

2.9 集合的边界

有了集合的闭包与边界的概念, 我们就可以定义集合的边界.

定义 2.4 (边界)**.** 集合 $A\subset X$ 的边界定义为 $\partial A:=\overline{A}\backslash\mathring{A}$.

注意到根据命题 2.13,$\partial A=\overline{A}\backslash\mathring{A}=\overline{A}\cap(\mathring{A})^c=\overline{A}\cap\overline{A^c}$. 结合命题 2.7, 我们有

命题 2.5. $x\in\partial A$ 当且仅当对任意 x 的开邻域 U,$U\cap A\neq\varnothing$ 且 $U\cap A^c\neq\varnothing$.

注记. 由定义立得我们可以将 X 分解为无交并 $X=\mathring{A}\sqcup\partial A\sqcup\overline{A}^c$.

集合的边界是一个拓扑概念, 如果我们改变集合上的拓扑那么它的边界可能发生变化. 比如, 考虑 $\mathbb{R}^2$ 上的通常拓扑, 闭圆盘 $\Omega=\{(x,y)\big|x^2+y^2\leqslant 1\}$ 的边界是单位圆周；如果将单位圆盘视作 $\mathbb{R}^3$ 的子集, 那么圆盘的边界是它本身. 如果考虑圆盘继承 $\mathbb{R}^2$ 的子空间拓扑, 那么圆盘的边界是空集.

2.10 边界的性质

我们列举拓扑空间中集合的边界的下列性质：

命题 2.6. 设 $(X,\mathscr{T})$ 是拓扑空间,$A\subset X$ 是子集, 那么

(1) ∂A 是闭集.

(2) $\partial A=\partial A^c$.

(3) $\partial\mathring{A}\subset\partial A,\partial\overline{A}\subset\partial A$.

(4) $\partial\partial A\subset\partial A$.

(5) $\partial\partial A = \partial A$ 当且仅当 ∂A 无处稠密.

(6) 特别地,$\partial\partial\partial A = \partial\partial A$.

(7) 如果 A 是开集或闭集, 那么 $\overset{\circ}{\partial A} = \varnothing$. 所以特别地如果 A 既开又闭那么 ∂A 无处稠密.

证明.

(1) 因为它是两个闭集 $\overline{A}$ 和 $\overline{A^c}$ 的交集.

(2) $\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c}$, 由对称性立得.

(3)
- $\overline{\mathring{A}} \subset \overline{A}, \mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$.
- $\overline{\overline{A}} = \overline{A}, \mathring{A} \subset \mathring{\overline{A}}$.

(4) 任取 $x \in \partial\partial A$. 假如 $x \notin \partial A$, 由于 X 有不交分解 $X = \mathring{A} \sqcup \partial A \sqcup \overline{A}^c$,$x$ 必在开集 $\mathring{A}$ 或开集 $\overline{A}^c$ 中, 这与包含 x 的任意开集与 ∂A 相交非空矛盾.

(5)

(6)

(7)

□

2.11 拓扑空间的范畴：不同表述

我们在 Lec3 中提到所有这些公里都能够被用来“定义”拓扑空间. 事实上, 我们不仅列举了至少五种不同的方式来“定义”拓扑结构, 我们还对每种情形刻画了连续映射. 换句话说, 我们有至少五种方式来构造拓扑空间的“范畴”!

定义 2.7 (Category)**.** 一个范畴 $\mathcal{C}$ 由下列两部分组成：

(1) 一类 $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, 其元素被称为对象.

(2) 一类 $\mathrm{Mor}(\mathcal{C})$, 其元素是对象间的态射, 满足

- 每个态射 f 有一个源对象 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ 和一个靶对象 $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. 记作 $f : X \to Y$, 读作“f 是从 X 到 Y 的一个态射”. 记从 X 到 Y 的全部态射为 $\mathrm{Mor}(X, Y)$.
- 态射 $f : X \to Y$ 与态射 $g : Y \to Z$ 的复合是一个态射 $g \circ f : X \to Z$, 满足
  (a)（结合律）如果有 $f : X \to Y, g : Y \to Z$ 和 $h : Z \to W$, 那么 $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
  (b)（单位）对任意 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, 存在恒等态射 $\mathrm{Id}_X : X \to X$ 满足对任意态射 $f : Z \to X$ 和态射 $g : X \to Y$, 成立 $\mathrm{Id}_X \circ f = f, g \circ \mathrm{Id}_X = g$.

例 2.8.

(1) 拓扑空间范畴 $\mathcal{TOP}$,

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{TOP})$ = 所有拓扑空间,

- 态射是拓扑空间之间的连续映射.

(2) 向量空间范畴 $\mathcal{VECT}$,

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{VECT})=$ 所有向量空间,
- 态射是向量空间之间的线性映射.

(3) 群范畴 $\mathcal{GROUP}$,

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{GROUP})=$ 所有群,
- 态射是群同态.

(4) 集合范畴 $\mathcal{SET}$,

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{SET})=$ 所有集合.
- 态射是关系.

(5) 一个拓扑空间 $(X,\mathscr{T})$ 作为一个范畴,

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{SET})=X$ 的所有开集.
- 态射是嵌入映射.

3 PSet04-1

(1)[Continuity for (A1) space]

Let X be an (A1) space, Y be any topological space. Prove: A map $f : X \to Y$ is continuous at x_0 if and only if it is sequentially continuous at x_0,i.e. for any sequence $x_n \to x_0$, we have $f(x_n) \to f(x_0)$.

证明.

- 连续性推序列连续上课已经给出.
- 序列连续推连续. 假设 f 不是连续映射, 则存在 $f(x_0)$ 的邻域 N, 使得 $f^{-1}(N)$ 不是 x_0 的邻域. 因为 X 是第一可数的, 所以 x_0 有可数邻域基 $\{N_n^{x_0}\}$. 因为 $f^{-1}(N)$ 不是 x_0 的邻域, 所以存在 $x_n \in N_n^{x_0} \backslash f^{-1}(N)$. 则 $\{x_n\}$ 收敛到 x_0, 但 $f(x_n)$ 不收敛到 $f(x_0)$, 矛盾！

$\square$

(2)[Closure and interior in product space]

Consider the box topology and the product topology on $\prod\limits_\alpha X_\alpha$,

(a) with respect to which topology, do we always have $\overline{\prod\limits_\alpha A_\alpha} = \prod\limits_\alpha \overline{A_\alpha}$?

(b) with respect to which topology, do we always have $\mathrm{Int}(\prod\limits_\alpha A_\alpha) = \prod\limits_\alpha \mathrm{Int}(A_\alpha)$?

证明.

(a) 该等式对于乘积拓扑成立.

- $\overline{\prod\limits_\alpha A_\alpha} \subset \prod\limits_\alpha \overline{A_\alpha}$. 任取 $(x_\alpha) \in \overline{\prod\limits_\alpha A_\alpha}$, 任取 (x_α) 的开邻域, 假设存在一个分量 x_β 和它的开邻域 $U_\beta \subset X_\beta$ 与 A_β 无交, 则 $U_\beta \times \prod\limits_{\alpha \neq \beta} X_\alpha$ 是 (x_α) 的与 $\prod\limits_\alpha A_\alpha$ 的无交开邻域, 矛盾！
- $\prod\limits_\alpha \overline{A_\alpha} \subset \overline{\prod\limits_\alpha A_\alpha}$. 任取 $(x_\alpha) \in \prod\limits_\alpha \overline{A_\alpha}$, 要证对它的任意只有有限个 $U_\alpha \neq X_\alpha$ 的开邻域 $\prod\limits_\alpha U_\alpha$, 有 $\prod\limits_\alpha U_\alpha \cap \prod\limits_\alpha A_\alpha \neq \varnothing$, 即对任意 α,$U_\alpha \cap A_\alpha \neq \varnothing$, 这是因为 $x_\alpha \in \overline{A_\alpha}$.

容易看出上述证明略作修改便可应用于箱拓扑的情形.

(b) 该等式对乘积拓扑不成立. 假如成立, 则无穷多个 X_α 开集的乘积还是开集.

该等式对于箱拓扑成立.

- $\mathrm{Int}(\prod\limits_\alpha A_\alpha) \subset \prod\limits_\alpha \mathrm{Int}(A_\alpha)$. 任取 $(x_\alpha) \in \mathrm{Int}(\prod\limits_\alpha A_\alpha)$, 存在 (x_α) 的开邻域 $\prod\limits_\alpha U_\alpha \subset \prod\limits_\alpha A_\alpha$, 则对任意 α 有 $x_\alpha \in U_\alpha \subset A_\alpha$, 即 $(x_\alpha) \in \prod \mathrm{Int}(A_\alpha)$.
- $\prod\limits_\alpha \mathrm{Int}(A_\alpha) \subset \mathrm{Int}(\prod\limits_\alpha A_\alpha)$. 任取 $(x_\alpha) \in \prod\limits_\alpha \mathrm{Int}(A_\alpha)$, 对任意 α, 存在 U_α 使得 $x_\alpha \in U_\alpha \subset A_\alpha$, 则 $(x_\alpha) \in \prod\limits_\alpha U_\alpha \subset \prod\limits_\alpha A_\alpha$, 即 $(x_\alpha) \in \mathrm{Int}(\prod\limits_\alpha A_\alpha)$.

$\square$

(3)[Characterize continuity via interior]

In class we proved that a map $f : X \to Y$ between two topological spaces is continuous if and only if $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ holds for any $A \subset X$.Apply the idea of "open-closed" duality, write down the corresponding characterization of continuity of f via the interior operation, and then prove it.

命题 3.1. *$f : X \to Y$ 连续当且仅当对任意 $B \in Y$ 成立 $f^{-1}(\operatorname{Int} B) \subset \operatorname{Int} f^{-1}(B)$.*

证明.

- 设 f 连续.$\operatorname{Int} B$ 是开集, 因此 $f^{-1}(\operatorname{Int} B)$ 是 X 中开集, 并且包含于 $f^{-1}(B)$, 因为 $\operatorname{Int} f^{-1}(B)$ 是含于 $f^{-1}(B)$ 中的最大开集, 因此 $f^{-1}(\operatorname{Int} B) \subset \operatorname{Int} f^{-1}(B)$.
- 要证 f 连续只需证开集的原像是开集. 任取 B 是 Y 中开集, 那么 $f^{-1}(\operatorname{Int} B) = f^{-1}(B) \subset \operatorname{Int} f^{-1}(B)$. 从而 $f^{-1}(B) = \operatorname{Int} f^{-1}(B)$ 是开集.

□

(4)[Closedness of the derived set]

(a) Consider a set $X = \{a, b, c\}$ of three elements. Let

$$\mathscr{T} = \{\varnothing, \{a\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

 (i) Check:$\mathscr{T}$ is a topology on X.

 (ii) Denote $A = \{b\}$. Find A' and $(A')'$. Is A' closed?

(b) Let (X, d) be a metric space. Prove: For any $A \subset X$, the derived set A' is closed.

(c) For a general topological space $(X, \mathscr{T})$,

 (i) Prove: If $A \subset X$ is closed, then A' is closed.

 (ii) For any subset $A \subset X$,prove: $(A')' \subset A \cup A'$.

证明.

(a) (i)
- $\varnothing, \{a, b, c\} \in \mathscr{T}$.
- $\{a\} \cup \{b, c\} = \{a, b, c\} \in \mathscr{T}$.
- $\{a\} \cap \{b, c\} = \varnothing \in \mathscr{T}$.

 (ii) $A' = \{c\}, (A')' = \{b\}$.$A'$ 不是闭集.

(b) 设 $a \in (A')'$, 存在 $\{x_n\}$ 使得 $x_n \in A' \cap \hat{B}(a, \frac{1}{n})$. 对于 x_i, 存在 $\{x_{in}\}$ 使得 $x_{in} \in A \cap \hat{B}(x_i, \frac{1}{n})$, 选取 $k(i)$ 充分大使得 $\frac{1}{k(i)} < \min\left\{d(a, x_i), \frac{1}{i}\right\}$. 则 A 中序列 $\left\{x_{n,k(n)}\right\}$ 满足 $0 < d(a, x_{n,k(n)}) < \frac{2}{n}$. 因此 $a \in A'$, 从而 $(A')' \subset A'$, 从而 A' 是闭集.

(c) (i) 因为 A 是闭的, 所以 $A' \subset A$, 从而 $(A')' \subset A'$, 从而 A' 是闭的.

 (ii) $A \cup A' = \overline{A} = \overline{\overline{A}} = \overline{A \cup A'} = \overline{A} \cup \overline{A'} = \overline{A} \cup A' \cup (A')'$, 从而 $(A')' \subset A \cup A'$.

□

Chapter 6

紧性、可数性与分离性

1 拓扑空间的各种紧性

1.1 紧性的定义与例子

我们从关于覆盖的一些定义开始:

定义 1.1. 设 $(X, \mathscr{T})$ 是拓扑空间,$A \subset X$ 是子集.

- 集族 $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}$ 被称作 A 的覆盖如果 $A \subset \bigcup_\alpha U_\alpha$.
- 覆盖 $\mathscr{U}$ 被称作有限覆盖如果它是有限族.
- 覆盖 $\mathscr{U}$ 被称作开覆盖如果每个元素 U_α 是开的.
- 覆盖 $\mathscr{V}$ 被称作 $\mathscr{U}$ 的子覆盖如果 $\mathscr{V} \subset \mathscr{U}$.
- 覆盖 $\mathscr{V}$ 被称作 $\mathscr{U}$ 的加细如果对任意 $V \in \mathscr{V}$, 存在 $U \in \mathscr{U}$ 使得 $V \subset U$.

定义 1.2. 设 $(X, \mathscr{T})$ 是拓扑空间,

(1) 我们称 X 是紧的如果 X 的任意开覆盖 $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}$ 有有限子覆盖.

(2) 我们称 X 是序列紧的如果任意序列 $x_1, x_2, \cdots \in X$ 有收敛子列 $x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots \to x_0 \in X$.

(3) 我们称 X 是极限点紧的如果对任意无限子集 $S \subset X$,$S' \neq \varnothing$.

称子集 $A \subset X$ 是紧/序列紧/极限点紧的, 如果赋予 A 子空间拓扑时它是紧/序列紧/极限点紧的.

1.2 紧性的例子

例 1.3. 在欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 中, 有界闭当且仅当紧当且仅当序列紧当且仅当极限点紧.

例 1.4. 考虑 $X = (\mathbb{N}, \mathscr{T}_{discrete}) \times (\mathbb{N}, \mathscr{T}_{trivial})$.

- 不紧: 设 $U_n = \{n\} \in \mathbb{N}$. 那么 $\{U_n\}$ 是开覆盖但没有有限子覆盖.
- 不序列紧: 序列 $\{x_n = (n, 1)\}$ 没有收敛子列.
- 极限点紧: 事实上, 对任意 $S \neq \varnothing$, 我们有 $S' \neq \varnothing$. 因为若 $(m_0, n_0) \in S$ 并且 $n_1 \neq n_0$, 那么 $(m_0, n_1) \in \{(m_0, n_0)\}' \subset S'$.

1.3 各种紧性之间的关系

不难看出“极限点紧”是三种紧性中最弱的一个.

命题 1.5. *设 X 是任意拓扑空间.*

(1) *如果 X 是紧的, 那么它也是极限点紧的.*

(2) *如果 X 是序列紧的, 那么它也是极限点紧的.*

证明.

(1) 设 X 是紧的,$S \subset X$ 是任意子集.

设 S 没有极限点. 那么 S 是闭集因为 $S' = \varnothing \subset S$.

对任意点 $a \in S$, 因为 $a \notin S'$, 存在开集 $U_a \in X$ 使得 $S \cap U_a = \{a\}$.

那么 $\left\{S^c, U_a \middle| a \in S\right\}$ 是 X 的一个开覆盖. 由紧性, 存在 $a_1, \cdots, a_k \in S$ 使得 $X = S^c \cup \bigcup_{i=1}^{k} U_{a_i}$.

从而 $S = S \bigcap X = \{a_1, \cdots, a_k\}$ 是有限集.

(2) 非最终常值序列的序列极限是极限点. 由于 S 是无限集, 所以能选出一个序列使得任意元素都只出现有限次, 所以它的子列不可能是最终常值序列, 从而由序列紧性必有极限点.

□

注记. 不久我们将看到

1. 紧与序列紧互不蕴含.

2. 对于度量空间, 紧、序列紧、极限点紧是等价的.

1.4 通过闭集刻画紧性

通过应用开集与闭集之间的对偶, 我们能将借助开集的定义转化成借助闭集的等价定义:

- $X = \bigcup_{\alpha} U_\alpha, U_\alpha$ 开集 $\Longrightarrow$ 存在 $U_{\alpha_i}, X = \bigcup_{i=1}^{k} U_{\alpha_i}$.
- $\varnothing = \bigcap_{\alpha} F_\alpha, F_\alpha$ 闭集 $\Longrightarrow$ 存在 $F_{\alpha_i}, \varnothing = \bigcap_{i=1}^{k} F_{\alpha_i}$.
- 对任意有限族 $\{F_{\alpha_1}, \cdots, F_{\alpha_k}\}$ 成立 $\bigcap_{i=1}^{k} F_{\alpha_i} \neq \varnothing \Longrightarrow \bigcap_{\alpha} F_\alpha \neq \varnothing$.

于是我们得到

命题 1.6 (紧性的闭集刻画)**.** *拓扑空间 X 是紧的当且仅当它满足下列性质, 如果 $\mathscr{F} = \{F_\alpha\}$ 是一族闭集使得任意有限交*

$$F_{\alpha_1} \cap \cdots \cap F_{\alpha_k} \neq \varnothing,$$

那么 $\bigcap_{\alpha} F_\alpha \neq \varnothing$.

作为推论, 我们得到

推论 1.7 (闭集套定理)**.** 设 X 是紧的, 并且

$$X \supset F_1 \supset F_2 \supset \cdots$$

是非空闭集套序列, 那么 $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \varnothing$.

1.5 通过基或子集刻画紧性

- 要注意"基覆盖"不是基, 而是从某个基中选出若干个集合组成的覆盖.

能用基覆盖来刻画紧性并不令人感到惊讶.

命题 1.8. 设 $\mathcal{B}$ 是 $(X, \mathscr{T})$ 的基. 那么 X 是紧的当且仅当 X 的任意基覆盖 $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}$ 都有有限子覆盖.

证明.

$\Longrightarrow$ 平凡.

$\Longleftarrow$ 设 $\mathcal{V}$ 是 X 的开覆盖, 对任意 $x \in X$, 存在 $U_x \in \mathcal{B}$ 和 $V_x \in \mathcal{V}$ 使得 $x \in U_X \subset V_x$.

因为 $\{U_x | x \in X\}$ 是 X 的基覆盖, 存在 $U_{x_1}, \cdots, U_{x_m}$ 使得 $X = \bigcup_{i=1}^{m} U_{x_i} \subset \bigcup_{i=1}^{m} V_{x_i}$, 得证. □

自然会考虑将这个命题推广到子基

定理 1.9 (Alexander 子基定理)**.** 设 $\mathcal{S}$ 是 $(X, \mathscr{T})$ 的子基. 那么 X 是紧的当且仅当 X 的任意子基覆盖 $\mathcal{U} \subset \mathcal{S}$ 有有限子覆盖.

令人惊讶的是, 它的证明要困难得多并且实际上该命题等价于选择公理!

2 紧性的命题

2.1 紧性 v.s. 连续映射

2.2 逆紧映射

2.3 紧空间的子集

2.4 紧 v.s. Hausdorff

定义 2.1. 设 $A \subset X$ 是一个子集,

(1)

(2)

(3) 一个覆盖 $\mathcal{V}$ 称为 $\mathcal{U}$ 的子覆盖如果 $\mathcal{V} \subset U$

注记. 子覆盖,$\mathcal{V}$ 中元素也是 $\mathcal{U}$ 中元素.

覆盖 $\mathcal{W}$ 称作加细如果任意 U 存在一个

定义 2.2. 我们称 $(X, \mathscr{T})$

(1) 紧的如果任意开集都有有限子覆盖

(2) 序列紧如果任何子列都有收敛子列

(3) 极限点紧如果无穷点集的导集 $S' \neq \varnothing$

注记. 我们称 $A \subset X$ 是紧的/序列紧的/极限点紧的如果它在子空间拓扑下是紧的/序列紧的/极限点紧的.

例 2.3. $\mathbb{R}^n$ 有界闭集等价于紧性等价于序列紧性等价于极限点紧性

例 2.4. $(X, \mathscr{T}_{cofinite})$, 紧的.

证明. 设 X 是紧的, 若 $X' = \varnothing$, 要推 $|X|$ 有限

任意 $x \in X$,$x \not\in nX'$, 存在 U_x 使得 $(U_x - \{x\}) \cap X = \varnothing$

所以 U_x 是开集

$\bigcup\limits_{x \in U} \{x\}$ 是一个开覆盖.

设 X 是序列紧的, □

$X \subset \bigcup\limits_{\alpha} U_\alpha$ 推出 $X \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k} U_{\alpha_i}$

$\varnothing = \bigcap\limits_{\alpha} F_\alpha$

命题 2.5. 设 f 是一个连续映射. 如果 A 是紧的, 那么它的像也是紧的. 如果 A 是序列紧的, 那么它的像也是序列紧的.

3 PSet04-2

(3)[Countably compact]
A topological space X is called *countably compact* if every countable open covering of X has a finite subcovering.

(a) Prove: Closed subspace of a countably compact space is countably compact.

(b) Prove: Any countably compact space is limit point compact.

(c) Prove: Any countably compact space if and only if it has the *nested sequence property*: for any nested sequence of non-empty closed sets $F_1 \supset F_2 \supset \cdots$, we have $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n \neq \varnothing$.

(d)

(e)

证明.

(a) 设 $K \subset X$ 是闭集, 任取 K 的可数开覆盖 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U_n$,$K^c \cup \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U_n$ 是 X 的可数开覆盖. 由 X 是可数紧的, 存在有限开覆盖 $K^c \cup \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i$, 它也是 K 的有限开覆盖, 而 $K \cap K^c = \varnothing$, 所以 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i$ 是 K 的有限开覆盖, 从而 K 是可数紧的.

(b)

(c)

(d)

(e)

□

(4)[One point compactification]
Given any topological space $(X, \mathscr{T})$, we say a compact topological space Y is a *compactification* of X if there exists a homeomorphism $f : X \to f(X) \subset Y$ such that $\overline{f(X)} = Y$.

(a) Prove: both $\mathbb{S}^1$ and $[0, 1]$ are compactifications of $\mathbb{R}$.

(b) For any non-compact topolotical space $(X, \mathscr{T})$, define a topology $\mathscr{T}^*$ on the set $X^* = X \cup \{\infty\}$

$$\mathscr{T}^* = \mathscr{T} \bigcup \{X^*\} \bigcup \left\{K^c \cup \{\infty\} \middle| K \subset X \text{ is closed and compact}\right\}.$$

Prove: $\mathscr{T}^*$ is a topology on X^*, and $(X^*, \mathscr{T}^*)$ is a compactification of $(X, \mathscr{T})$.

(c) Prove: the one-point compactification of $\mathbb{N}$ is homeomorphic to $\{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N}\right\}$.

证明.

(a)
- 球极投影.
- $f = \arctan x$.

(b)
- $\varnothing, X^* \in \mathscr{T}^*$.
-
  - $\bigcup_\alpha K_\alpha^c \cup \{\infty\} = \left(\bigcap_\alpha K_\alpha\right)^c \cup \{\infty\}$
    由于闭集的任意交是闭集, 紧集的闭子集是紧集, 所以 $\bigcap_\alpha K_\alpha$ 既是闭集又是紧集.
    因此按定义 $\left(\bigcap_\alpha K_\alpha\right)^c \cup \{\infty\} \in \mathscr{T}^*$.
  - 任取 $U \in \mathscr{T}$,$U \cup K^c \cup \{\infty\} = (U^c \cap K)^c \cup \{\infty\} \in \mathscr{T}^*$.
  - 结合以上两条与一些平凡情况, 可知 $\mathscr{T}^*$ 对任意并运算封闭.
-
  - $\bigcap_{i=1}^n K_i^c \cup \{\infty\} = \left(\bigcup_{i=1}^n K_i\right)^c \cup \{\infty\} \in \mathscr{T}^*$.
  - $U \cap (K^c \cup \{\infty\}) = U \cap K^c \in \mathscr{T}$
  - 结合以上两条与一些平凡情况, 可知 $\mathscr{T}^*$ 对有限交运算封闭.
- 考虑 X 到 X^* 的自然嵌入, 它显然是同胚.

(c) 定义 $\varphi : n \mapsto \dfrac{1}{n}, \infty \mapsto 0$. 容易验证它是同胚.

唯一需要注意的是 $\{0\} \cup \left\{\dfrac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N}\right\}$ 中的开集长成什么样子：孤立的 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ 当然是开集, 但孤立的 $\{0\}$ 不是开集, 因为任意包含 0 的开区间都会包含无穷多个 $\dfrac{1}{n}$.

$\square$

Chapter 7

度量空间中的紧性

1 度量空间的拓扑层面和非拓扑层面

1.1 度量空间的一些拓扑性质

- 第一可数.
  - $F \subset X$ 是闭集当且仅当它包含它所有的序列极限.
    - 序列紧集是闭集.
      - 当我们说全空间 X 序列紧时, 这个含义是非常清晰的：任意序列都有收敛子列.
      - 当我们说一个子空间 $A \subset X$ 序列紧时, 我们用的拓扑是子空间拓扑.
      - 用子空间拓扑, 就意味着我们看不到 X 中 A 之外的其它点.
      - 在子空间拓扑的意义下收敛, 就意味着这个序列极限一定是 A 中的点.
      - 而"$F \subset X$ 是闭集当且仅当它包含它所有的序列极限"中的收敛, 可是在 X 中的收敛！提高警惕！
      - 仔细想下证明你会发现这里还要用到 Hausdorff！准确地说是用到收敛序列的极限唯一！警惕！
  - 到其他拓扑空间的映射连续当且仅当序列连续.
- Hausdorff.
  - 度量空间中的紧集是闭集.
    - 特别地, 独点集是闭集.
  - 收敛序列极限唯一.
- 正规.

设 (X,d) 是一个度量空间, 其上的度量拓扑 $\mathscr{T}_d$ 是由基

$$\mathcal{B} = \left\{ B(x,r) \middle| x \in X, r \in \mathbb{R}_{>0} \right\}.$$

生成的拓扑. 相较一般的拓扑空间, 度量空间有许多良好的性质：

(1) 任意度量空间都是第一可数的, 因为对任意点 $x \in X$, 存在一个可数的邻域基

$$\mathcal{B}_x = \left\{ B(x,r) \middle| r \in \mathbb{Q}_{>0} \right\}.$$

作为推论, 我们有

- $F \subset X$ 是闭集当且仅当它包含它所有的序列极限. 特别地, 任何序列紧的集合在 X 中是闭的.
- 一个映射 $f : X \to Y$ 是连续的当且仅当它是序列连续的.

(2) 任意度量空间是 Hausdorff 的, 因为对于任意 $x \neq y \in X$, 如果我们取 $\delta = \dfrac{d(x,y)}{2} > 0$, 那么

$$B(x,\delta) \cap B(y,\delta) = \varnothing.$$

作为推论, 我们有

- 度量空间中的紧集是闭的.
- 特别地, 独点集 $\{x\}$ 是闭的.
- 度量空间中任意收敛序列极限唯一.

(3) 事实上, 在度量空间中, 我们不仅能把不同的点用不交的开集分离开来, 还能将不交的闭集用不交的开集分离开来：根据度量空间中的 Urysohn 引理, 对于 X 中任意不交的闭集 A 和 B, 我们能够找到一个连续映射 $f : X \to [0,1]$ 使得 f 在 A 上取值为 1, 在 B 上取值为 0. 结果是, 不交开集 $f^{-1}((-\infty, \frac{1}{3}))$ 和 $f^{-1}((\frac{2}{3}, +\infty))$ 将闭集 A 和 B 分离开来. 这样的拓扑性质被称作正规并且会在后续的课程中详细研究.

注记. 这门课程中我们还会研究其他一些拓扑性质, 比如：紧性、第二可数性、连通性. 这些性质大部分都只能被某些度量空间满足.

1.2 度量空间的度量层面：有界性

在前面我们定义了度量空间 (X,d) 中的子集 A 的直径

$$diam(A) = \sup \left\{ d(x,y) \middle| x, y \in A \right\}.$$

我们还看到直径和有界性不是要给拓扑概念：如果你将度量换成一个拓扑等价度量, 直径可能会发生变化, 甚至一个有界集合会变成无界. 但是, 容易看到

命题 1.1. 任意无界集合既不是紧的也不是序列紧的.

证明. □

从而

命题 1.2. 任意 (X,d) 中的紧集/序列紧集都是有界闭集, 并且这个有界对任意拓扑等价度量成立.

相反地, 容易找到有界闭集却不是紧集的例子：

例 1.3.

(1) $(\mathbb{N}, d_{discrete})$ 是 $(\mathbb{N}, d_{discrete})$ 中的有界闭集.

(2) $(\mathbb{R}), \dfrac{d}{d+1}$ 是 $(\mathbb{R}, \dfrac{d}{d+1})$ 中的有界闭集.

(3) $((0,1], d_{Euclidean})$ 是 $((0,+\infty), d_{Euclieans})$ 中的有界闭集.

结果是, 有界闭集不能成为在度量空间中刻画紧性的等价条件.

1.3 度量空间的度量层面：完全有界性

- 换做是我的话, 我不会引入这个"完全有界性", 而是引入"在任意拓扑等价度量下都有界".
- 显然"在任意拓扑等价度量下都有界"是不太好验证的, 而这里定义的"完全有界性"蛮不错.
- 我揣测这两个概念或许是等价的.

在仔细研究过上面的例子 (1)(2) 之后, 你会发现它们实际上是很差的有界空间：我们能够用一个大球覆盖它们, 但我们可能不能用有限个小球覆盖他们.

结果是对于度量空间, 紧性蕴涵着完全有界性.

命题 1.4. *如果 (X,d) 是紧的或序列紧的, 那么它是完全有界的.*

证明. 紧 $\Longrightarrow$ 完全有界.$\{B(x,\varepsilon)\big|x\in X\}$ 有有限子覆盖.

序列紧 $\Longrightarrow$ 完全有界. 假设 X 不完全有界, 即存在 $\varepsilon>0$ 使得 X 不能被有限多个 ε-球覆盖.

任取 $x_1\in X$, 因为 $X\backslash B(x_1,\varepsilon)\neq\varnothing$, 可取 $x_2\in X\backslash B(x_1,\varepsilon)$.

归纳下去, 得到序列 $\{x_n\}$ 满足 $d(x_n,x_m)>\varepsilon, \forall n\neq m$. 所以 $\{x_n\}$ 没有收敛子列. 矛盾. $\square$

1.4 度量空间的度量层面：Lebesgue 数引理

另一个非常有用的度量性质是所谓的 Lebesgue 数引理. 对于欧氏空间我们已经见过这个引理. 现在我们把它推广到度量空间：

命题 1.5. *如果 (X,d) 是序列紧的, 那么对任意 X 的开覆盖 $\mathscr{U}$, 存在 $\delta>0$[1]使得对任意 $A\subset X$ 只要满足 $\operatorname{diam}(A)<\delta$, 便存在 $U\in\mathscr{U}$ 使得 $A\subset U$.*

1.5 度量空间的度量层面：完备性

另一个对于度量空间非常有用的度量但不拓扑概念是完备性. 我们需要

定义 1.6. *度量空间 (X,d) 中的序列 $\{x_n\}$ 被称作 Cauchy 列如果对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $N>0$ 使得*

$$d(x_n,x_m)<\varepsilon,\quad \forall\ n,m>N.$$

定义 1.7. *我们称 (X,d) 是完备的如果 X 中的任意 Cauchy 列都是收敛的.*

1.6 迂回：完备化

定义 1.8. *我们称完备度量空间 $(\widetilde{X},\tilde{d})$ 是度量空间 (X,d) 的完备化如果存在一个等距嵌入 $f:X\to\widetilde{X}$ 使得 $\overline{f(X)}=\widetilde{X}$.*

[1]依赖于 $\mathscr{U}$, 这样的 δ 被称作 $\mathscr{U}$ 的 Lebesgue 数

1.7 迂回：完备 = 绝对闭

2 度量空间中各种紧性的等价性

2.1 度量空间中极限点紧 $\Longleftrightarrow$ 序列紧

我们已经看到对于任意的拓扑空间,

$$\text{紧} \Longrightarrow \text{极限点紧} \Longleftarrow \text{序列紧}.$$

我们首先的一个观察是:

命题 2.1. *对于度量空间, 序列紧等价于极限点紧.*

证明. 只需要证明度量空间中极限点紧蕴含序列紧.

设 $\{x_n\}$ 是 (X,d) 中的序列.

如果 $A=\{x_n \big| n\in\mathbb{N}\}$ 是有限集, 那么由鸽巢原理,$\{x_n\}$ 有一个常值子列, 从而有收敛子列.

如果 A 是无限集, 由极限点紧,$A'\neq\varnothing$.

按照之前的论述, 在第一可数空间中, 极限点是该集合中某个序列的序列极限, 这样看来这个命题似乎证完了. 但真的是这样吗? 非也. 序列 $\{x_n\}$ 与集合 $A=\{x_n \big| n\in\mathbb{N}\}$ 是有本质区别的. 我们想要的是序列 $\{x_n\}$ 的一个收敛子列, 而不仅仅是 A 中的一个收敛序列. 因此, 你将看到, 为了完成我们的证明, 我们还要用到 Hausdorff 性.

任取 $x_0\in A'$. 按定义, 对任意 $k\in\mathbb{N}$, 我们有 $B(x_0,\dfrac{1}{k})\cap(A\backslash\{x_0\})\neq\varnothing$.

断言, 事实上,$B(x_0,\dfrac{1}{k})\cap(A\backslash\{x_0\})$ 是无限集（为什么想要无限集? 因为取了 $\{x_n\}$ 中的某个元素后下一个元素只能在它后面取）.

否则, 如果 $B(x_0,\dfrac{1}{k})\cap(A\backslash\{x_0\})=\{x_{m_1},\cdots,x_{m_k}\}$, 那么我们取 N 足够大使得 $\dfrac{1}{N}<\min(d(x_0,x_{m_k}))$, 从而 $B(x_0,\dfrac{1}{N})\cap(A\backslash\{x_0\})=\varnothing$, 矛盾（实际上是在用 Hausdorff 性, 仔细想想可弱化为 (T1)）.

所以, 我们能够找到 $n_1<n_2<\cdots$ 使得 $x_{n_k}\in B(x_0,\dfrac{1}{k})$, 显然该子列收敛于 x_0. □

对上面的证明略作修改, 我们就能够得到

命题 2.2. *设 X 是第一可数和 Hausdorff 的, 那么对于 X 极限点紧等价于序列紧.*

2.2 极限点紧 $\Longleftrightarrow$ 完全有界 + 绝对闭

命题 2.3. *度量空间 (X,d) 是序列紧的当且仅当它是完备且完全有界的.*

证明. 设 (X,d) 是完备且有界闭的, 设 $\{x_n\}$ 是 (X,d) 中的序列.

因为 X 是完全有界的, 我们能够用有限个半径为 1 的开球覆盖住 X.

从而在这个有限覆盖中存在 B_1 使得 $J_1:=\{n\in\mathbb{N}\big|x_n\in B_1\}$ 是无限集.

接着拿有限个半径为 $\dfrac{1}{2}$ 的开球去覆盖 X, 存在 B_2 使得 $J_2:=\{n\in J_1\big|x_n\in B_2\}$ 是无限集.

这样构造下去, 得到嵌套序列 $\mathbb{N}\supset J_1\supset J_2\supset\cdots$ 使得每个 J_k 是无限集, 并且 $i,j\in J_k$ 蕴含 $d(x_i,x_j)<\dfrac{2}{k}$. 现在取 $n_i\in J_i$ 使得 $n_1<n_2<\cdots$. 那么 $\{x_{n_i}\}$ 是 $\{x_n\}$ 的子列并且是 Cauchy 列. 因为 (X,d) 是完备的, 所以 $\{x_{n_i}\}$ 一定收敛到某个 $x_0\in X$, 得证. □

2.3 度量空间中不同紧性的刻画的等价性

将上面所有的拼图碎片放到一起, 我们得出

定理 2.4 (度量空间中的紧性)**.** *在度量空间 (X,d) 中, 下列"紧性"是等价的:*

(1) *A 是紧的.*

(2) *A 是序列紧的.*

(3) *A 是极限点紧的.*

(4) *A 是完备且完全有界的.*

证明. □

2.4 Lebesgue 数引理的构造性证明

3 PSet05-1

(1)[Completion of metric spaces]
Let X be a set, and (Y, d_Y) be metric spaces. Consider the space of bounded maps,

$$\mathcal{B}(X,Y) = \left\{ f : X \to Y \middle| f(X) \text{ is bounded in } Y \right\}.$$

(a) Prove: The supremum metric $d_\infty(f,g) = \sup\left\{ d_Y(f(x), g(x)) \middle| x \in X \right\}$ is a metric on $\mathcal{B}(X,Y)$.

(b) Prove: If Y is complete, so is $(\mathcal{B}(X,Y), d_\infty)$.

(a′) Prove: The supremum metric $d_\infty(f,g) = \sup\left\{ d_Y(f(x), g(x)) \middle| x \in X \right\}$ is a metric on $\mathcal{B}(X,Y)$.

(b′) Prove: If Y is complete, so is $(\mathcal{B}(X,Y), d_\infty)$.

In what follows, suppose (X, d_X) is a metric space, and take $Y = \mathbb{R}$.

(c) Fix a point $x_0 \in X$. For any $a \in X$,define a function $f_\alpha : X \to \mathbb{R}$ via $f_\alpha(x) := d_X(x,a) - d_X(x,x_0)$. Prove:$f_\alpha \in \mathcal{B}(X,\mathbb{R})$.

(d) Prove: the map

$$\phi : (X,d) \to (\mathcal{B}(X,\mathbb{R}), d_\infty), a \mapsto f_\alpha$$

is an isometric embedding,i.e. $d_X(a,b) = d_\infty(f_a, f_b)$ for any $a, b \in X$.

(e) Prove: Any metric space (X, d_X) admits a completion.

(f) Prove: If (Y_1, d_1) and (Y_2, d_2) are two completions of (X, d_X), then (Y_1, d_1) and (Y_2, d_2) are isometric.

证明.

(a)
- $d_Y(f(x), g(x)) \leqslant d_Y(f(x), f(x_0)) + d_Y(f(x_0), y_0) + d_Y(y_0, g(x_0)) + d_Y(g(x_0), g(x)) < M$
左侧关于 x 取上确界得到 $d_\infty(f,g) \leqslant M$, 因此 $d_\infty(f,g) \in \mathbb{R}$ 从而 d_∞ 是良好定义的.
- $\sup\left\{ d_Y(f(x), g(x)) \middle| x \in X \right\} = 0 \Longrightarrow f(x) \equiv g(x)$.
- 对称性显然.
- 由 (Y, d_Y) 中度量的三角不等式,$d_Y(f(x), g(x)) \leqslant d_Y(f(x), h(x)) + d_Y(h(x), g(x)) \leqslant d_\infty(f,h) + d_\infty(h,g)$, 左侧取上确界得到 $d_\infty(f,g) \leqslant d_\infty(f,h) + d_\infty(h,g)$.

(b) 任取 $(\mathcal{B}(X,Y), d_\infty)$ 中的一串 Cauchy 列 $\{f_n\}$. 对任一点 $x_0 \in X$, 考虑 Y 中序列 $\{f_n(x_0)\}$, 对任意 $\varepsilon > 0$, 因为 $\{f_n\}$ 是 Cauchy 列, 所以存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得对于任意 $n, m > N$ 成立 $d_\infty(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon$, 对相同的 N, n, m, 成立 $d_Y(f_n(x_0), f_m(x_0)) \leqslant d_\infty(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon$. 因此 $\{f_n(x_0)\}$ 是 Y 中的 Cauchy 列, 由 Y 的完备性,Cauchy 列存在极限, 将该极限定义为 $f(x_0)$. 容易验证按这种方式定义出来的 f 正是 $\{f_n\}$ 在 $\mathcal{B}(X,Y)$ 中的极限.

□

(2)[From limit point compact to sequentially compact] In the proof of Proposition 2.1, we only used the following two properties:

(i) Every $x \in X$ has a descending countable neighborhood basis $U_1^x \supset U_2^x \supset \cdots$.

(ii) If $x$is a limit point of A, then every neighbourhood of x contains infinitely many points of A.

As a consequence, there are many other topological spaces in which limit point compact is equivalent to sequentially compact:

(a) Prove Proposition 2.3.

(b) Prove that in Proposition 2.3, one can weaken the Hausdorff condition to the following (T1) condition: For any $x \neq y$ in X, there exists open sets U and V in X so that $x \in U \backslash V$ and $y \in V \backslash U$.

(c) The (T1) condition is equivalent to a sentence on page 1 of today's notes. Find out it and prove the equivalence.

Chapter 8

乘积空间的紧性

1 有限乘积的紧性

1.1 管子引理

今天我们研究紧空间的乘积的紧性. 为了证明两个紧空间的乘积是紧的, 我们需要管子引力. 你应该意识到“局部到整体”的原则在证明中的应用.

引理 1.1 (管子引理)**.** *如果 $A \subset X$,$B \subset Y$ 是紧的,$N \subset X \times Y$ 是开的且 $A \times B \subset N$, 那么存在 X 中开集 U 和 Y 中开集 V 使得*

$$A \times B \subset U \times V \subset N.$$

注记. 如果 A, B 不紧则容易构造出反例, 在 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 中, 我们有

$$\{0\} \times \mathbb{R} \subset N = \big\{(x, y)\big||xy| < 1\big\},$$

但是不存在开集 $U \supset \{0\}$ 使得 $U \times \mathbb{R} \subset N$.

1.2 有限乘积的紧性

作为推论, 我们证明了

命题 1.2. *如果 $A \subset X, B \subset Y$ 是紧的, 那么 $A \times B$ 也是.*

1.3 Tychonoff 定理

定理 1.3 (Tychonoff)**.** *如果对任意 α,X_α 是紧的, 那么 $(\prod_\alpha X_\alpha, \mathscr{T}_{product})$ 也是紧的.*

命题 1.4. *可数多个序列紧空间的乘积是序列紧的.*

1.4 紧性 v.s. 序列紧

2 Tychonoff 定理的证明

2.1 Tychonoff 定理的证明

2.2 选择公理和它的等价形式

2.3 Alexander 子集定理的证明

2.4 Tychonoff 定理 $\Longrightarrow$ 选择公理

3 Tychonoff 定理的应用

3.1 应用 1：图的染色

3.2 应用 2：

3.3 应用 3：

4 PSet06-1

(1)[The Topology of the Cantor set]

(a) Prove:$(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \mathscr{T}_{product})$ is homeomorphic to the Cantor set C in $\mathbb{R}$.

(b) Prove: Every point in the Cantor set is a limit point.

(c) Prove:As a subset of $[0,1]$, the Cantor set is nowhere dense.

证明.

(a) $f: C \to X, \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \mapsto \left(\frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{2}, \cdots\right)$, 其中 $a_n = 0$ 或 2.

- 双射. 显然.
- 连续映射. 只需证明子基中元素 $U(N,a) = \left\{(a_n)_{n=1}^{\infty} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : a_N = a\right\}$ 的原像是开集, 其中 $N \in \mathbb{N}, a = 0$ 或 1. 不妨设 $a = 1$. 由康托集的分形性质, 也不妨设 $N = 1$. 则 $f^{-1}(U(1,1)) = \left(\frac{1}{2}, \frac{7}{6}\right) \bigcap C$ 是开集. 当 N 为其他固定值时, 将康托集视为 2^{N-1} 个小康托集的无交并, 这样就化归到 $N = 1$ 的情形, 而开集的有限并仍是开集. 得证.
- $(\{0,1\}, \mathscr{T}_{discrete})$ 显然是紧的, 由 Tychonoff 定理,$(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \mathscr{T}_{product})$ 也是紧的.
- Hausdorff 空间 $\mathbb{R}$ 的子空间 C 也是 Hausdorff 的.
- 紧空间到 Hausdorff 空间的连续双射是同胚.

(b) 对于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}, \left\{\sum\limits_{m=1}^{\infty} \frac{a_{mn}}{3^m}\right\}_{n=1}^{\infty}$ 以它为序列极限, 其中 $a_{mn} = a_n, m \leqslant n; a_{mn} = 0, m > n$.

(c) 因为康托集是闭集, 所以 $\overline{C} = C$, 即证康托集无内点.$C = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} C_n$, 其中 C_n 是 2^n 个长度为 $\frac{1}{3^n}$ 的闭区间的并, 因此任意长度的开区间都不可能含于康托集中.

□

(2)[Sequentially compactness for products]

(a) Let $X_1, \cdots, X_n$ be sequentially compact topological spaces. Prove: the product space $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ is sequentially compact.

(b) Is $X = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ sequentially compact when equipped with the box topology $\mathscr{T}_{box}$? Prove your claim.

(c) Let $X_1, \cdots, X_n, \cdots$ be sequentially compact topological spaces. Prove: when endowed with the product topology, $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ is sequentially compact.

(d) Now suppose (X_n, d_n) are compact metric spaces. Define a product metric on $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ via

$$d((x_n), (y_n)) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(x_n, y_n)}{(1 + \mathrm{diam}(X_k)) \cdot 2^n}.$$

Prove: The metric topology on X induced by d coincides with the product topology on X.

证明.

(a) 只需对 $n = 2$ 的情形证明. 任取 X 中序列 $\{(a_n, b_n)\}_{n=1}^{\infty}$, 由于 X_1 是序列紧的, 所以 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有收敛子列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 收敛到 a_0. 由于 X_2 是序列紧的, 所以 $\{b_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 有收敛子列 $\left\{b_{n_{k_j}}\right\}_{j=1}^{\infty}$ 收敛到 b_0. 则 $\left\{(a_{n_{k_j}}, b_{n_{k_j}})\right\}_{j=1}^{\infty}$ 是 $\{(a_n, b_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 的收敛到 (a_0, b_0) 的收敛子列, 这由任意包含 (a_0, b_0) 的开集 U 都包含 $V \times W$ 显然, 其中 V 是包含 a_0 的开集,W 是包含 b_0 的开集.

(b) $(X, \mathscr{T}_{box})$ 不是序列紧的. 容易看出 $(X, \mathscr{T}_{box}) = (X, \mathscr{T}_{discrete})$, 而离散拓扑的收敛序列一定是最终常值序列, 所以只要其中任意元素都只出现有限次便无收敛子列.

(c) 任取序列 $\{(a_n)\}$, 我们可以选出子列 $\{(a_{n1})\}$ 关于第一个分量收敛. 可以选出 $\{(a_{n1})\}$ 的子列 $\{(a_{n2})\}$ 关于第二个分量收敛. 这样进行下去得到递降序列 $\{(a_{n1})\} \supset \{(a_{n2})\} \supset \{(a_{n3})\} \cdots$. 在 $\{(a_{ni})\}$ 中选取第 i 个元素组成子列 $\{(a_{nn})\}$, 断言它在 $(X, \mathscr{T}_{product})$ 中收敛到 (a_{0n}), 其中 a_{0i} 是 $\{(a_{ni})\}$ 在 X_i 中的序列极限. 只需说明对任意包含 (a_{0n}) 的子基元素,$\{(a_{nn})\}$ 都最终进入子基元素中. 由于包含 (a_{0n}) 的子基元素形如 $\prod_{n=1}^{\infty} U_n$, 其中只有有限个 U_n 不是全集 X_n, 所以这是显然成立的.

(d)
- 度量拓扑有基 $\mathcal{B}_d = \{B((x_n), r)\}$.
  乘积拓扑有基 $\mathcal{B}_{product} = \left\{ \prod_{n=1}^{\infty} U_n \middle| 有限个U_n = B(x_n, r_n), 此外都为X_n \right\}$.
- 要证 $B((x_n), r) \in \mathscr{T}_{product}$, 任取 $(y_n) \in B((x_n), r)$, 要证存在 $U \in \mathcal{B}_{product}$ 使得 $(y_n) \in U \subset B((x_n), r)$. 由于存在 r' 使得 $(y_n) \in B((y_n), r') \subset B((x_n), r)$, 所以简化为对任意 $B((x_n), r)$ 去证存在 U 使得 $(x_n) \in U \subset B((x_n), r)$.
  对于 $r > 0$, 存在 N, 使得 $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{d((x_n), (y_n))}{(1 + \mathrm{diam}(X_k)) \cdot 2^n} < \frac{r}{2}$ 对任意 $(y_n) \in X$ 成立.
  对于 $1 \leqslant n \leqslant N$, 令 $r_n = \frac{2^{n-1} r (1 + \mathrm{diam}(X_k))}{N}$.
  令 $U = \prod_{n=1}^{N} B_n(x_n, r_n) \times \prod_{n=N+1}^{\infty} X_n$, 则 $(x_n) \in U \subset B((x_n), r)$.
- 要证 $\mathcal{B}_{product} \subset \mathscr{T}_d$, 由上类似论证可知, 只需对 $(x_n) \in \prod_{n=1}^{\infty} U_n \in \mathcal{B}_{product}$, 找到 $r > 0$ 使得 $(x_n) \in B((x_n), r) \subset \prod_{n=1}^{\infty} U_n$.

由于 $\prod_{n=1}^{\infty} U_n$ 中只有有限项为 $B_n(x_n, r_n)$, 所以我们只需要控制 r 使得当将 r 全部分配到一个这样的分量时不会爆掉就好了, 因此只需取 $r = \min\limits_{n\text{使得}U_n\text{不是}X_n} \left\{ \dfrac{d((x_n),(y_n))}{(1+\operatorname{diam}(X_k))\cdot 2^n} \right\}$ 即可.

$\square$

(3)[Interior of compact subsets]

(a) Let X_α be a family of topological spaces such that X_α is non-compact for infinitely many α's. Let K be a compact set in $(\prod_\alpha X_\alpha, \mathscr{T}_{product})$. Prove:$K$ has no interior point.

(b) Consider the uniform metric on $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. In this space, is the closed unit ball compact? Can a compact subset has any interior point?

(c) A topological space $(X, \mathscr{T})$ is called locally compact if for any $x \in X$, there exists a compact set K_x and an open set U_x such that $x \in U_x \subset K_x$.

Prove: The product $(\prod_\alpha X_\alpha, \mathscr{T}_{product})$ of a family of topological spaces is locally compact if and only if there is a finite set of indices Γ_0 such that

$$X_\alpha \text{ is} \begin{cases} \text{compact for } \alpha \notin \Lambda_0, \\ \text{locally compact for} \alpha \in \Lambda_0. \end{cases}$$

证明.

(a) 假设 K 有内点 x, 那么存在开集 U_x 使得 $x \in U_x \subset K.U_x$ 形如 $\prod_\alpha U_\alpha$, 其中只有有限个 U_α 不是 X_α, 因为有无穷多个 X_α 非紧, 所以 $\prod_\alpha U_\alpha$ 中有无穷多个 U_α 是非紧的 X_α, 不妨设 $U_\beta = X_\beta$ 非紧. 取 X_β 的任意开覆盖 $\mathcal{V}$, 我要证它有有限子覆盖导出矛盾. 由 X_β 的开覆盖构造 K 的开覆盖 $\left\{ \prod_\alpha V_\alpha \middle| V_\beta \in \mathcal{V}, V_\alpha = X_\alpha, \alpha \neq \beta \right\}$, 它是 $\prod_\alpha X_\alpha$ 的开覆盖因此当然是 K 的开覆盖. 因为 K 是紧的, 所以它有有限子覆盖, 取出该有限子覆盖中每个 $\prod_\alpha V_\alpha$ 的第一个分量, 因为 $x \in U_x \subset K$, 所以这些第一个分量就构成 X_β 的有限子覆盖, 矛盾.

(b)

(c)

$\square$

(4)[The existence of Banach limit]

Consider the vector space of all bounded sequences of real numbers,

$$X = l^\infty = \left\{ (a_1, a_2, \dots) \middle| a_i \in \mathbb{R} \text{ and } \sup_n |a_n| < \infty \right\}.$$

On X there is a naturally defined shift operator

$$T : X \to X, \{a_1, a_2, \cdots\} \mapsto \{a_2, a_3, \cdots\}.$$

A mean on X is a linear map $L : X \to \mathbb{R}$ such that

$$\inf a_n \leqslant L(\{a_n\}) \leqslant \sup a_n$$

holds for all $\{a_n\} \in X$. A *Banach limit* is a mean that is invariant under the shift operator T, i.e. such that $L(\{a_n\}) = L(T(\{a_n\}))$ holds for all $\{a_n\} \in X$.

(a) Define $L_m : X \to \mathbb{R}$ by $L_m : X \to \mathbb{R}$ by $L_m(\{a_n\}) = \dfrac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} a_i$. Prove: L_m is a mean for each m, and $\lim\limits_{m\to\infty} |L_m(T(\{a_n\})) - L_m(\{a_n\})| = 0$.

(b) Let $\mathcal{M}$ be the set of all means on X. One can regard $\mathcal{M}$ as a subset of $\mathcal{M}(X, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^X$, equipped with the product topology. Prove:$\mathcal{M}$ is compact.

(c) Prove:There exists a Banach limit on X.

(d) What is the Banach limit of a convergent sequence? What is the Banach limit of $\{0, 1, 0, 1, 0, \cdots\}$?

证明.

(a)
- 线性映射显然.
- $L(\{a_n\}) \leqslant \max\limits_{1\leqslant i\leqslant m} \{a_i\} \leqslant \sup a_n$.
- 同理 $L(\{a_n\}) \geqslant \inf a_n$.
- $\lim\limits_{m\to\infty} |L_m(T(\{a_n\})) - L_m(\{a_n\})| = \lim\limits_{m\to\infty} \dfrac{|a_{m+1} - a_1|}{m} \leqslant \lim\limits_{m\to\infty} \dfrac{2\sup_n |a_n|}{m} = 0.$

(b)

(c)

(d)

□

5 Stone-Weierstrass 定理

6 一致拓扑

6.1 $\mathcal{M}(X, Y)$ 上的三种拓扑

设 X 是任意集合,Y 是度量空间. 考虑映射空间 $\mathcal{M}(X, Y)$.
在 $\mathcal{M}(X, Y)$ 上我们已经研究了三种拓扑：

(1) 乘积拓扑, 它有子基：

$$\mathcal{S}_{product} = \left\{\pi_x^{-1}\left(B^Y(y_x, r_x)\right) \middle| \forall x \in X, \forall y_x \in Y, \forall r_x > 0\right\}.$$

(2) 箱拓扑, 它有基：

$$\mathcal{B}_{box} = \left\{ \prod_{x\in X} \left(B^Y(y_x, r_x)\right) \big| \forall y_x \in Y, \forall r_x > 0 \right\}.$$

(3) 因为 Y 是度量空间, 我们可以定义一致度量

$$d_u(f,g) := \sup_{x\in X} \frac{d_Y(f(x),g(x))}{1+d_Y(f(x),g(x))}.$$

我们已经在 PSet1-2-4-c 中看到 d_u 是 $\mathcal{M}(X,Y)$ 上的一个度量并且 f_n 一致收敛到 f 当且仅当 f_n 在 $(\mathcal{M}(X,Y),d_u)$ 中收敛到 f.

定义 6.1. d_u 在 $\mathcal{M}(X,Y)$ 上诱导的度量拓扑被称作 $\mathcal{M}(X,Y)$ 上的一致拓扑.

注记. *正如我们知道的, 乘积拓扑与逐点收敛拓扑是一致的. 正如 PSet3-1-3(a), 我们可以证明：一致拓扑弱于箱拓扑, 但强于乘积拓扑. 此外, 对任意无穷集合 X 和非平凡的 Y, 这三个拓扑两两不同；它们对于有限集 X 是相同的.*

类似于 PSet5-1-1(b) 中 $\mathcal{B}(X,Y)$ 的完备性的证明, 我们有

命题 6.2. *设 Y 是完备的. 那么 d_u 是 $\mathcal{M}(X,Y)$ 上的完备度量.*

6.2 $\mathcal{C}(X,Y)$ 上的一致拓扑

现在假设 $(X,\mathscr{T})$ 是一个拓扑空间. 那么我们可以讨论 $\mathcal{M}(X,Y)$ 中的映射的连续性. 特别地, 我们可以研究连续映射空间 $\mathcal{C}(X,Y)$.

正如 PSet1-2-4(b), 我们有

命题 6.3. *$\mathcal{C}(X,Y)$ 是 $(\mathcal{M}(X,Y),d_u)$ 的闭子集.*

注记. *一般地, 当 Y 不是度量空间时,$\mathcal{C}(X,Y)$ 在 $(\mathcal{M}(X,Y),\mathscr{T}_{product})$ 和 $(\mathcal{M}(X,Y),\mathscr{T}_{box})$ 中不必是闭的.*

作为推论,

推论 6.4. *如果 Y 是完备的, 那么 $(\mathcal{C}(X,Y),d_u)$ 是完备的.*

注记. *设 X 是紧的. 那么 $\mathcal{C}(X,Y)\subset\mathcal{B}(X,Y)$. 在 $\mathcal{B}(X,Y)$ 上我们有一个更简单的度量 $d_\infty(f,g) := \sup_{x\in X}|f(x)-g(x)|$. 容易证明 f_n 关于 d_u 收敛于 f 当且仅当 f_n 关于 d_∞ 收敛于 f. 换句话说,d_u 和 d_∞ 在 $\mathcal{C}(X,Y)$ 上诱导相同的拓扑. 所以当 X 是紧集时, 我们可以用 d_∞ 代替 d_u 从而简化计算.*

7 Stone-Weierstrass 定理

7.1 Weierstrass 逼近定理

7.2 $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ 作为含幺代数

我们今天的主要目的之一是将 Weierstrass 逼近定理推广到更一般的拓扑空间. 在本节的剩余部分中, 如果没有其他说明, 我们总是假定 X 是紧 Hausdorff 空间.

当然一般的在拓扑空间中我们不再有多项式的概念. 但我们依旧能问：我们能用相对简单的子集来逼近 $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ 吗?

在 Weierstrass 逼近定理的情形中, 我们使用了子集多项式空间 $\mathcal{P}([0,1])$. 观察到：$\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ 是一个代数,$\mathcal{P}([0,1])$ 是 $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ 的一个子代数.

7.3 两个条件：“无处消失”和“分离点”

7.4 Stone-Weierstrass 定理, 版本 1

在 1937 年,M.Stone 将 Weierstrass 逼近定理推广到紧 Hausdorff 空间.

定理 7.1 (紧 Hausdorff 空间的 Stone-Weierstrass 定理, 版本 1)**.** *设 X 是任意紧 Hausdorff 空间. 设 $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ 是无处消失且分离点的子代数. 那么 $\mathcal{A}$ 在 $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ 中稠密.*

7.5 Stone-Weierstrass 定理, 版本 2 和证明

定理 7.2 (紧 Hausdorff 空间的 Stone-Weierstrass 定理, 版本 2)**.**

7.6 Stone-Weierstrass 定理, 版本 3

定理 7.3 (紧 Hausdorff 空间的 Stone-Weierstrass 定理, 版本 3)**.**

7.7 复值函数的 Stone-Weierstrass 定理

7.8 一个很长的注记：拓扑的代数化

8 PSet06-2

(1)[The uniform metric]

(a) Prove Proposition 1.3 and Proposition 1.4.

(b) Here is another proof of Proposition 1.4 for the special case $Y=\mathbb{R}$, find out the advantage of this proof.

证明.

(a)

命题 8.1. *Suppose Y is complete. Then d_u is a complete metric on $\mathcal{M}(X,Y)$.*

证明. 任取 $(\mathcal{M}(X,Y),d_u)$ 中的一串 Cauchy 列 $\{f_n\}$, 对任一点 $x_0\in X$, 考虑 Y 中序列 $\{f_n(x_0)\}$, 对任意 $0<\varepsilon<\dfrac{1}{2}$, 因为 $\{f_n\}$ 是 Cauchy 列, 所以存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得对于任意 $n,m>N$ 成立 $d_u(f_n(x_0),f_m(x_0))<\varepsilon$, 对相同的 N,n,m, 成立 $d_Y(f_n(x_0),f_m(x_0))<\dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon}<2\varepsilon$. 因此 $\{f_n(x_0)\}$ 是 Y 中的 Cauchy 列, 由 Y 的完备性,Cauchy 列存在极限, 将该极限定义为 $f(x_0)$. 下证按这种方式定义出来的 f 正是 $\{f_n\}$ 在 $\mathcal{M}(X,Y)$ 中的极限. 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 N, 使得对任意 $n,m>N$, 成立 $d_Y(f_n(x),f_m(x))<2\varepsilon$, 令 $m\to\infty$, 得到 $d_Y(f_n(x),f(x))\leqslant 2\varepsilon$, 由 x 的任意性,$d_u(f,g)\leqslant\dfrac{2\varepsilon}{1+2\varepsilon}<2\varepsilon$, 得证. □

命题 8.2. *$\mathcal{C}(X,Y)$ is a closed subset of $(\mathcal{M}(X,Y),d_u)$.*

证明. 任取 $\mathcal{C}(X,Y)$ 中的收敛序列 $\{f_n\}$, 要证它的极限 $f\in\mathcal{C}(X,Y)$, 即证对固定的 $x_0\in X$, 对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 X 中的开集 U, 只要 $x\in U$, 便成立 $d_Y(f(x),f(x_0))<\varepsilon$. 对同一个 ε, 存在 N_ε, 只要 $n>N_\varepsilon$, 对任意的 $x\in X$, 成立 $d_Y(f_n(x),f(x))<\dfrac{\varepsilon}{3}$. 选定一个 $n>N_\varepsilon$, 由于 f_n 是连续函数, 所以对上面的 $\varepsilon>0$, 存在 $U_n\in X$, 只要 $x\in U_n$, 便成立 $d_Y(f(x),f(x_0))<\dfrac{\varepsilon}{3}$.
因此对于 x 满足 $x\in U_n$, 成立

$$d_Y(f(x),f(x_0))<d_Y(f(x),f_n(x))+d_Y(f_n(x),f_n(x_0))+d_Y(f_n(x_0),f(x_0))<\varepsilon.$$

□

(b) 看不出好处.

□

(2)[Applications of Stone-Weierstrass]

(a) Prove: Any continuous function on $[0,1]$ can be approximated uniformly by functions of the form

$$a_0+a_1\mathrm{e}^x+a_2\mathrm{e}^x+\cdots+a_n\mathrm{e}^{nx},\quad n\in\mathbb{N}.$$

As a consequence, prove if f is continuous function on $[0,1]$ satisfying

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{e}^{nx}\mathrm{d}x=0,\quad n=0,1,2,\cdots,$$

then $f=0$. What if it holds for even n?

(b) Prove: Any continuous functions on $\mathbb{S}^1$ can be approximated uniformly by functions of the form

$$a_{-n}\mathrm{e}^{-inx} + a_{-n+1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-1)x} + \cdots + a_{-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} + a_0 + a_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \cdots + a_n\mathrm{e}^{inx}, n \in \mathbb{N}.$$

(c) Let X, Y be compact Hausdorff spaces. Prove: any $f \in \mathcal{C}(X \times Y, \mathbb{R})$ can be approximated uniformly by functions of the form

$$f_1(x)g_1(y) + f_2(x)g_2(y) + \cdots + f_n(x)g_n(y), \quad n \in \mathbb{N},$$

where $f_k \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}), g_k \in \mathcal{C}(Y, \mathbb{R})$.

证明.

(a)
- 显然是子代数.
- 存在非零函数.$f = \mathrm{e}^x$.
- 分离点.$f = \mathrm{e}^x$ 是单射.
-

(b) $\mathbb{S}^1$ 上的连续函数可用周期为 2π 三角函数逼近, 利用欧拉公式便立得题中形式函数.

(c)
- 显然是子代数.
- 存在非零函数.$\mathrm{Id}_X \cdot \mathrm{Id}_Y$.
- 分离点. 对于 $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$, 不妨设 $x_1 \neq x_2$,

□

(3)[Stone-Weierstrass for complex-valued functions]

定理 8.3. *Let X be compact Hausdorff, and $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ be a complex subalgebra which separates points and vanishes at no point. Morever, assume $\mathcal{A}$ is self-adjoint, then $\mathcal{A}$ is dense in $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$.*

证明. 对任意 $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$, 我们要找 f_ε 使得 $d_\infty(f, f_\varepsilon) < \varepsilon$. 考虑 $\mathrm{Re}\,\mathcal{A} := \left\{\mathrm{Re}\,g \middle| g \in \mathcal{A}\right\}$,$\mathrm{Im}\,\mathcal{A} := \left\{\mathrm{Im}\,h \middle| h \in \mathcal{A}\right\}$. 存在 $\mathrm{Re}\,g \in \mathrm{Re}\,\mathcal{A}$ 使得 $d_\infty(\mathrm{Re}\,g, \mathrm{Re}\,f) < \frac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon$, 存在 $\mathrm{Im}\,h \in \mathrm{Im}\,\mathcal{A}$ 使得 $d_\infty(\mathrm{Im}\,h, \mathrm{Im}\,f) < \frac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon$. 因为 $\mathcal{A}$ 是自伴的, 所以对于 $g, h \in \mathcal{A}$,$\mathrm{Re}\,g, \mathrm{Im}\,h \in \mathcal{A}$. 令 $f_\varepsilon = \mathrm{Re}\,g + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,h$, 命题得证. □

(4)[Functions vanishing at ∞] Consider the set

$$\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \left\{f \in (\mathbb{R}, \mathbb{R}) \middle| \forall \varepsilon > 0, \exists r > 0 \;\text{ s.t. }\; |f(x)| < \varepsilon \text{ for } |x| > r\right\}.$$

Note that $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ and thus d_∞ is a metric on it.

(a) Prove: $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ is an algebra.

(b) Let $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ be a subalgebra that vanishes at no point and separates points.Use Theorem 2.11 to prove: $\mathcal{A}$ is dense in $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

证明.

(a)
- 设 $f_1, f_2 \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, 考虑 $f = f_1 + f_2$. 对于任意的 $2\varepsilon > 0$, 取 $r = r_1(\varepsilon) + r_2(\varepsilon)$.
- 设 $f_1 \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$,$\lambda \in \mathbb{R}$, 考虑 $f = \lambda f_1$. 对于任意的 $|\lambda|\varepsilon > 0$, 取 $r = r_1(\varepsilon)$.
- $(f_1 + f_2) \cdot g = f_1 \cdot g + f_2 \cdot g$.
- $(\lambda_1 f_1) \cdot (\lambda_2 f_2) = (\lambda_1\lambda_2)(x \cdot y)$.

(b) 假设 $\overline{\mathcal{A}} \neq \mathcal{C}_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, 那么存在 $f_0 \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, 存在 $\varepsilon > 0$, 使得对任意 $g \in \mathcal{A}$,$d_\infty(f_0, g) \geqslant \varepsilon$. 考虑 $\mathcal{C}_0(X,\mathbb{R}) = \left\{f|_X \middle| f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R},\mathbb{R})\right\}$, 其中 X 是 $\mathbb{R}$ 中紧集. 相应地考虑 $\mathcal{A}_X = \left\{g|_X \middle| g \in \mathcal{A}\right\} \subset \mathcal{C}_0(X,\mathbb{R})$.$\mathcal{C}_0(X,\mathbb{R})$ 上有度量 $d_{X,\infty}(f,g) = \sup\limits_X d_Y(f(x), g(x))$. 易知有 $d_{X,\infty}(f_0|_X, g|_X) \geqslant \varepsilon$. 即 $\mathcal{A}_X$ 在 $\mathcal{C}_0(X,\mathbb{R})$ 中不稠密, 由定理 2.11, 矛盾.

□

9 Arzela-Ascoli 定理

9.1 $\mathcal{C}(X,Y)$ 上的五个拓扑

- 当我们谈论 $\mathcal{M}(X,Y)$ 上的某某收敛拓扑, 我们需要要求 Y 是度量空间.
- 当我们谈论 $\mathcal{M}(X,Y)$ 的子空间 $\mathcal{C}(X,Y)$, 我们需要要求 X 和 Y 都是拓扑空间.
- $\mathscr{T}_{p.c.} \subset \mathscr{T}_{c.c.} \subset \mathscr{T}_{u.c.}$.
- 当 X 紧,$\mathscr{T}_{c.c.}$ 就是 $\mathscr{T}_{u.c.}$.
- $\mathscr{T}_{u.c.}$ 可度量化, 特别地,$(\mathcal{M}(X,Y), \mathscr{T}_{u.c.})$ 是 (A1) 的.
- 当 $X\sigma$-紧,$\mathscr{T}_{c.c.}$ 也是可度量化的.
- 对于 $\mathscr{T}_{u.c.}$ 和 $\mathscr{T}_{c.c.}$,$\mathcal{C}(X,Y)$ 都具有“包含所有的序列极限”这样的良好的性质, 但只有可度量化的情形下我们才能断言 $\mathcal{C}(X,Y)$ 是闭的.
- 体会逐点、局部、整体的区别.
-

$\mathscr{T}_{p.c.}$	$B(f, x_1, \cdots, \varepsilon)$
$\mathscr{T}_{c.c.}$	$B(f,K,\varepsilon) = \left\{g \middle| \sup\limits_K d_Y(f(x), g(x)) < \varepsilon\right\}$
$\mathscr{T}_{u.c.}$	$B(f, X, \varepsilon)$

9.2 三个拓扑的缺点

设 X 是拓扑空间,(Y,d) 是度量空间. 上一章中我们已经见到了连续映射空间上的三个拓扑,$\mathscr{T}_{p.c.}$, $\mathscr{T}_{uniform}$, $\mathscr{T}$
我们希望研究 $\mathcal{C}(X,Y)$ 中的映射序列的收敛性.

例 9.1. 考虑 $X = Y = \mathbb{R}$ 的情形, 那么

(1)

(2)

例 9.2 $(X=Y=\mathbb{R})$**.** $f_n(x):\mathrm{e}^{-nx^2}$ 逐点收敛到 $f(x)=\begin{cases}1, x=0\\ 0, x\neq 0\end{cases}$

这个告诉我, 逐点收敛不太好, 我确实找到了收敛列, 但是极限不好

例 9.3. $f_n(x)=\dfrac{x^2}{n}f(x)=0$, 但在一致收敛拓扑和箱拓扑下不收敛.

这个告诉我, 一致拓扑不好, 我有一个好极限, 但不收敛

我们希望找到一个 $\mathcal{C}(X,Y)$ 上的合理的拓扑使得"坏的收敛序列"在这个拓扑中不再收敛, 而"好的收敛序列"依旧收敛. 通过上面的分析, 我们需要的是一个 $\mathcal{C}(X,Y)$ 上弱于 $\mathscr{T}_{uniform}$, 但连续映射列在这个拓扑意义下的收敛极限依旧是连续的.

想要的：

- 足够多的收敛子列
- 极限足够好

9.3 紧收敛拓扑

受上面的最后一个例子启发, 我们试图寻找 $\mathcal{M}(X,Y)$ 上描述"在每个紧集上收敛"的拓扑. 不难找到一个：设 X 是一个拓扑空间,(Y,d) 是一个度量空间. 对于任意紧集 $K\subset X$ 和任意 $\varepsilon>0$, 我们记

$$B(f;K,\varepsilon)=\left\{g\in\mathcal{M}(X,Y)\Big|\sup_{x\in K}d(f(x),g(x))<\varepsilon\right\}.$$

引理 9.4.

$$\mathcal{B}=\left\{B(f,K,\varepsilon)\middle|f\in\mathcal{M}(X,Y),K\subset X\ compact,\varepsilon>0\right\}$$

是一组基, 称其生成的拓扑为紧收敛拓扑, 记作 $\mathscr{T}_{c.c.}$,f_n 在 $(\mathcal{M}(X,Y),\mathscr{T}_{c.c.})$ 中收敛到 f 当且仅当 f_n 在 X 的每个紧集上一致收敛.

证明.

- 要证 $\mathcal{B}$ 是一组基, 只要验证基的第二个条件, 对任意 $g\in B(f_1,K_1,\varepsilon_1)\cap B(f_2,K_2,\varepsilon)$, 那么存在紧集 K_0 和 $\varepsilon_0>0$ 使得 $B(g,k_0,\varepsilon_0)\subset B(f_1,K_1,\varepsilon_1)\cap B(f_2,K_2,\varepsilon)$.

  取 $K_0=K_1\cup K_2$, 取 $\varepsilon_0=\min(\varepsilon_1-\sup\limits_{K_1}d_Y(f_1(x),g(x)),\varepsilon_2-\sup\limits_{K_2}d_Y(f_2(x),g(x)))$
- $f_n\to f_0$ 在 $\mathscr{T}_{c.c}$ 中, 任意 ε,K 存在 N, 任意 $n>B$ 使得 $f_n\in B(f_0,K,\varepsilon)$, 这就是说对任意 ε 任意 K,$\sup\limits_K d_Y(f_n(x),f_0(x))<\varepsilon$, 也就是说对任意 K,$\{f_n\}$ 在 K 上一致收敛.

□

注记. 设 $A\subset X$ 是任意子集. 容易验证限制映射

$$r_A:\mathcal{M}(X,Y)\to\mathcal{M}(A,Y),\quad f\mapsto f\big|_A$$

关于所有三个拓扑 $\mathscr{T}_{p.c.}$,$\mathscr{T}_{c.c.}$,$\mathscr{T}_{u.c.}$ 都是连续映射.

9.4 紧生成空间

回到我们最初的问题, 假设 $f_n \in \mathcal{C}(X,Y)$,$f_n \to f_0$ 在 $\mathscr{T}_{c.c}$ 的意义下, 问 f_0 是否连续. 以目的为导向找条件!

想要开集的原像是开集.$f^{-1}(V)$ 是开集, 我们有 $f^{-1}(V)\cap K$ 是 K 中开集, 对任意 K 是紧集.

定义 9.5. 称 X 是紧生成的, 如果它满足上面的条件.

显然在上面的条件中, 我们可以将“开”替换为“闭”.

注记. 由第五讲中的例 *2.11* 和定理 *2.7*,X 是紧生成的当且仅当 X 是所有紧子集的拓扑并. 也就是使得所有嵌入映射 $\iota_K : K \hookrightarrow X$ 的最强拓扑.

通过上面的分析, 我们得到

命题 9.6. 如果 X 是紧生成的,$f_n \in \mathcal{C}(X,Y)$ 且 $f_n \to f_0$ 在 $\mathscr{T}_{c.c.}$ 的意义下收敛到 f_0, 那么 $f_0 \in \mathcal{C}(X,Y)$.

显然任意紧拓扑空间是紧生成的. 事实上, 在非常弱的条件下,X 是紧生成的, 例如,

- 所有第一可数空间, 从而所有度量空间
- 所有局部紧空间
- 所有 CW 复形（代数拓扑中的一类重要的拓扑空间）

都是紧生成的. 下面我们给出一个不是紧生成的空间的例子.

例 9.7 (不紧生成)**.** $(\mathcal{M}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\mathscr{T}_{p.c.})$ 不是紧生成的.

证明. 我要造一个集合, 不是闭集, 但是跟每个紧集的交都是闭集.

令 $A_n = \left\{ f \in \mathcal{M}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \middle| \exists |S| \leqslant n \text{ s.t. } f(x) = \begin{cases} n, x \notin S \\ 0, x \in S \end{cases} \right\}$

$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

- $\bar{A} = A \bigcup \{0\}$
  - $0 \in A'$
  - $\forall f \in A' \backslash A$
    - $Imf \not\subset \mathbb{N} \cup \{0\}$
- $A \cap K$ 在 K 中闭
  - $0 \notin K$
  - $0 \in K$

在每一种情况下根据定义造邻域. □

9.5 局部紧 Hausdorff 空间

现在我们介绍一类重要的拓扑空间.

定义 9.8. 我们称拓扑空间 X 是局部紧的如果任意点 $x \in X$ 有一个紧邻域, 即存在一个开集 U 和一个紧集 K 使得 $x \in U \subset K$.

命题 9.9. 设 X 是 *Hausdorff* 的, 则 X 局部紧当且仅当任意 $x \in X$ 存在开邻域 U 满足 $\overline{U}$ 是紧的.

命题 9.10. 设 $A \subset B$ 且 B 有紧闭包, 则 A 也有紧闭包.

命题 9.11. 任意局部紧空间是紧生成的.

证明. 设 X 是局部紧的. 设 $A \subset X$ 并且 $A \cap K$ 在 K 中是开集对任意紧集 $K \subset X$ 成立.

要证 A 是开集, 任取 $x \in A$. 由 X 是局部紧的, 存在开集 U 和 K 使得 $x \in U \subset K$.

按条件 $A \cap K$ 是 K 中的开集, 即存在 X 中开集 V 使得 $A \cap K = V \cap K$.

从而 $A \cap U = V \cap U$ 是 X 中开集, 而 $x \in A \cap U \subset A$, 因此 A 是开集. □

在几乎所有应用中, 局部紧空间也是 Hausdorff 的. 我们称一个局部紧 Hausdorff 空间为 LCH 空间. 它们在分析中扮演了重要的角色. 例如,$\mathbb{R}^n$ 上的实分析能够被推广到 LCH 上. 我们能够证明 $\mathbb{Q}_p$, 即在 p-adic 度量下的完备化, 是 LCH 的. 因此,LCH 上的分析在 p-adic 分析中非常有用.

下面是一些 LCH 空间和非 LCH 空间的例子.

例 9.12.

- 任意紧 *Hausdorff* 空间是 *LCH* 的.
- $\mathbb{R}^n$ 是 *LCH* 的. 更一般地, 任何局部欧几里得 *Hausdorff* 空间是 *LCH* 的.
- $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ 不是局部紧的.
  - 假设 $\mathbb{Q}$ 是局部紧的, 任取 $x \in \mathbb{Q}$, 存在 $(\mathbb{Q}, \mathscr{T}_{subspace})$ 中开邻域 U 满足其在 $(\mathbb{Q}, \mathscr{T}_{subspace})$ 中的闭包 $\overline{U}$ 是 $(\mathbb{Q}, \mathscr{T}_{subspace})$ 中紧集. 存在 (a,b) 使得 $x \in (a,b) \cap \mathbb{Q} \subset U$, 可选取 a,b 都是无理数. 则 $\overline{(a,b) \cap \mathbb{Q}} = [a,b] \cap \mathbb{Q} = (a,b) \cap \mathbb{Q}$ 是 $(\mathbb{Q}, \mathscr{T}_{subspace})$ 中紧集, 因为 $(\mathbb{Q}, \mathscr{T}_{subspace})$ 是度量空间, 所以紧性等价于序列紧性, 但 $(a,b) \cap \mathbb{Q}$ 显然不序列紧!
- $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_{Sorgenfrey})$ 不是局部紧的.
  - 假设 $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_{Sorgenfrey})$ 是局部紧的, 任取 $x \in \mathbb{R}$, 存在 $[a,b)$ 和紧集 K 使得 $x \in [a,b) \subset K$. 但 $[a,b)$ 也是闭的, 从而是紧的, 矛盾!

我们将需要下面的命题, 证明留作练习：

命题 9.13. 设 X 是 *LCH* 的,$K \subset X$ 是紧集,$U \subset X$ 是开集且 $K \subset U$. 那么存在开集 V 使得 $\overline{V}$ 是紧集, 且

$$K \subset V \subset \overline{V} \subset U.$$

9.6 紧开拓扑

紧收敛拓扑是对从拓扑空间到度量空间的映射定义的. 容易将紧收敛拓扑的概念推广为 $\mathcal{M}(X,Y)$ 上的一个拓扑, 其中 X 和 Y 都是拓扑空间（虽然是自然的推广, 但其实很不一样了）.

定义 9.14. 设 X,Y 是拓扑空间. 对于任意紧集 $K\subset X$ 和开集 $V\subset Y$, 记

$$S(K,V)=\{f\in\mathcal{M}(X,Y)\mid f(K)\subset V\}.$$

$\mathcal{M}(X,Y)$ 上由子基

$$\mathcal{S}_{c.o.}=\{S(K,V)\mid K\subset X\text{是紧集},V\subset Y\text{是开集}\}$$

生成的拓扑 $\mathscr{T}_{c.o.}$ 被称作紧开拓扑.

注记. 因为对于拓扑空间 Y 没有了三角不等式, 所以我们不能证明上述构成一组基.

我们只关心 $\mathcal{C}(X,Y)$ 上的 $\mathscr{T}_{c.o.}$, 因为它在这个子空间中最有用.

例 9.15. 如果我们取 X 是单点集 $\{*\}$, 那么空间 $(\mathcal{C}(\{*\},Y),\mathscr{T}_{c.o.})$ 同胚于空间 Y 本身.

注记. 我们能够证明如果 Y 是度量空间, 那么 $\mathscr{T}_{c.o.}=\mathscr{T}_{c.c.}$. 特别地,$\mathscr{T}_{c.c.}$ 不依赖于 Y 上的拓扑等价度量的选取. 如果 X 是紧的, 那么 $\mathscr{T}_{u.c.}$ 不易啊利于 Y 上的拓扑等价度量的选取.

事实上只要“中间变量空间”是局部紧的, 那么映射的复合运算关于紧开拓扑便是连续的：

命题 9.16. 设 X,Y 和 Z 是拓扑空间, 其中 Y 局部紧 *Hausdorff*. 那么复合映射

$$\circ:\mathcal{C}(X,Y)\times\mathcal{C}(Y,Z)\to\mathcal{C}(X,Z),\quad (f,g)\mapsto g\circ f$$

关于紧开拓扑 $\mathscr{T}_{c.o.}$ 是连续的.

推论 9.17. 如果 X 是 *LCH*, 那么

$$X\times\mathcal{C}(X,Y)\to Y,(x,f)\mapsto f(x)$$

是连续映射.

10 Arzela-Ascoli 定理

10.1 Arzela-Ascoli 定理, 经典版本

给定一列, 或更一般地, 一族连续映射, 分析中的一个核心问题是：我们能否找到一个子列（一致）收敛到另一个连续函数？

例如, 在分析中, 为了证明 PDE 或变分问题的解的存在性, 我们能先构造一列函数近似求解. 如果我们能证明这列“近似解”有一个子列收敛到一个很好的函数, 那么一般再做一些努力, 我们就能够说明这个极限就是想要的解. 这样的手段被称作“紧致性论证”. 执行这样的紧致性论证的最有用的工具之一是 Arezla-Ascoli 定理.

你在分析课程中见到的 Arzela-Ascoli 定理的最初的版本是

定理 10.1 (Arzela-Ascoli, 经典版本)**.** *序列 $\{f_n\} \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ 有一个收敛子列当且仅当它一致有界和等度连续.*

10.2 等度连续

回忆函数族 $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ 被称作

- 一致有界如果存在 $M > 0$ 使得对任意 $x \in [0,1]$ 和任意 $f \in \mathcal{F}$, 成立 $|f_n(x)| \leqslant M$.
- 等度连续如果对任意 $x_0 \in [0,1]$ 和任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得对所有 $x \in [0,1]$ 满足 $|x-x_0| < \delta$ 和所有 $f \in \mathcal{F}$ 成立 $|f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$.

不难看出这两个条件都是必要的：

(1) 序列 $f_n(x) = n$ 是等度连续的但它么有收敛子列因为它不是一致有界的, 尽管序列中的每个函数都是有界函数.

(2) 序列 $f_n(x) = x^n$ 在 $[0,1]$ 上是一致有界的但在 $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ 中他么已有收敛子列因为它在 1 处不是等度连续的, 尽管序列中的每个函数在 1 处都是连续的.

等度连续的概念容易被推广到任意到从任意拓扑空间 X 到任意度量空间 Y 的映射：

定义 10.2. *设 (Y,d) 是度量空间,X 是拓扑空间. 设 $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X,Y)$ 是子集. 我们称 $\mathcal{F}$ 在 x_0 处是等度连续的, 如果对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 x_0 的开邻域 U, 对任意 $x \in U$, 任意 $f \in \mathcal{F}$, 成立 $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.*

我们称 $\mathcal{F}$ 是等度连续的如果它在任意点 $x \in X$ 处是等度连续的.

注意到等度连续是一个度量性质：它依赖于 Y 上的度量. 事实上等度连续是 $(\mathcal{C}(X,Y), d_u)$ 中完全有界性的推广：

命题 10.3. *设 (Y,d) 是度量空间,$\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{C}(X,Y)$ 中的完全有界集. 那么 $\mathcal{F}$ 是等度连续的.*

证明. □

我们知道 $\mathcal{C}(X,Y)$ 关于 $\mathscr{T}_{p.c.}$ 不是闭的. 但是, 对于一个等都连续的族 $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X,Y)$, 我们有

命题 10.4. *设 $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X,Y)$. 设 $\mathcal{K}$ 是 $\mathcal{F}$ 在 $(\mathcal{M}(X,Y), \mathscr{T}_{p.c.})$ 的闭包. 那么 $\mathcal{K}$ 也是等度连续的, 特别地,$\mathcal{K} \subset \mathcal{C}(X,Y)$.*

证明. 对任意 $x_0 \in X$ 和 $\varepsilon > 0$, 我们要找到 x_0 的一个开邻域 U 使得

$$d(g(x), g(x_0)) < \varepsilon, \quad \forall x \in U, \forall g \in \mathcal{K}.$$

由 $\mathcal{F}$ 的等度连续性, 我们能找到 x_0 的一个开邻域 U 使得

$$d(f(x), f(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall x \in U, \forall f \in \mathcal{F}.$$

你要想清楚为什么我们能证明 $\mathcal{K}$ 的等度连续性, 因为 $g \in \mathcal{K}$ 离 $\mathcal{F}$ 很近. 在逐点收敛拓扑下, 什么叫很近？意思是你指定有限个点, 指定一个 ε, 可以找到一个 $f \in \mathcal{F}$ 在这有限个点和 g 的差距不超过 $\varepsilon.f$ 只是跳板, 我们的目的是通过三角不等式来得到 $g(x)$ 与 $g(x_0)$ 离的很近. 所以哪怕对不同的 x 选取了不同的 f 也没关系.

对任意的 $g \in \mathcal{K}, x \in U$, 记

$$\begin{aligned} V &= \left\{ h = Y^X \middle| d(h(x), g(x)) < \frac{\varepsilon}{3}, d(h(x_0), g(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3} \right\} \\ &= \pi_x^{-1} \left((g(x) - \frac{\varepsilon}{3}, g(x) + \frac{\varepsilon}{3}) \right) \bigcap \pi_{x_0}^{-1} \left((g(x_0) - \frac{\varepsilon}{3}, g(x_0) + \frac{\varepsilon}{3}) \right). \end{aligned}$$

那么 V 是 g 在 $(\mathcal{M}(X,Y), \mathscr{T}_{p.c.})$ 中的开邻域. 因为 $g \in \mathcal{K}$ 且 K 是 $\mathcal{F}$ 在 $(\mathcal{M}(X,Y), \mathscr{T}_{p.c.})$ 中的闭包, 所以 $V \cap \mathcal{F} \neq \varnothing$. 任取 $f \in V \cap \mathcal{F}$, 我们得到

$$d(g(x), g(x_0)) \leqslant d(g(x), f(x)) + d(f(x), f(x_0)) + d(f(x_0), g(x_0)) < \varepsilon.$$

这样就证明了 $\mathcal{K}$ 的等度连续性. □

10.3 Arzela-Ascoli 定理, 一般版本

我们希望 $\mathcal{F}$ 满足 $\mathcal{F}$ 中的任意序列有（一致）收敛子列, 极限可以不在 $\mathcal{F}$ 中而在 $\mathcal{C}(X,Y)$ 中. 换句话说, 我们希望 $\overline{F}$ 是紧的或者被包含在 $(\mathcal{C}(X,Y), \mathscr{T}_{c.c.})$ 的一个紧子集中（如果希望是一致收敛拓扑就用 $\mathscr{T}_{u.c.}$）.

定义 10.5. *称 $A \subset X$ 为预紧的如果 $\overline{A}$ 是紧的.*

为了简便我们引入以下定义：

定义 10.6. *设 $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X,Y)$, 记 $\mathcal{F}_a = \left\{ f(a) \middle| \, f \in \mathcal{F} \right\}$,*

- *称 $\mathcal{F}$ 是逐点预紧的如果对任意 $a \in X$,$\mathcal{F}_\alpha$ 在 Y 是预紧的.*
- *如果 Y 是度量空间, 称 $\mathcal{F}$ 是逐点有界的如果对任意 $a \in X$,$\mathcal{F}_\alpha$ 在 Y 中是有界的.*

接下来我们将要证明一般版本[1]的 Arzela-Ascoli 定理：

定理 10.7 (Arzela-Ascoli 定理, 一般版本)**.** *设 X 是拓扑空间,(Y,d) 是度量空间. 令 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{C}(X,Y)$ 的子集, 其中 $\mathcal{C}(X,Y)$ 赋予紧收敛拓扑 $\mathscr{T}_{c.c.}$.*

(1) *设 $\mathcal{F}$ 是等度连续的和逐点预紧的, 那么 $\mathcal{F}$ 的闭包在 $(\mathcal{C}(X,Y), \mathscr{T}_{c.c.})$ 中是紧的.*

(2) *如果 X 是 LCH 的, 那么反之也对.*

[1]存在更一般的 Arzela-Ascoli 定理, 它刻画了映到一致空间的映射族的紧性

10.4 Arzela-Ascoli 定理, 一般版本的证明

引理 10.8. 设 $(X, \mathscr{T}_X)$ 是拓扑空间,$A \subset Y \subset X$, 则 $(X, \mathscr{T}_X)$ 和 $(Y, \mathscr{T}_{subspace})$ 在 A 上诱导的子空间拓扑是一致的.

引理 10.9.

现在我们来证明主要的定理

证明.

(1) 我们记 $\mathcal{K}$ 是 $\mathcal{F}$ 在 $(\mathcal{M}(X,Y), \mathscr{T}_{p.c.})$ 中的闭包.

- $\mathcal{K}$ 在 $(\mathcal{M}(X,Y), \mathscr{T}_{p.c.})$ 中是紧的.
  设 $K_a = \overline{\mathcal{F}_a}$, 那么由假设 K_a 是紧的, 从而是闭的（Y 是度量空间从而 Hausdorff）. 所以由 Tychonoff 定理,$\prod\limits_{a\in X} K_a$ 在 $(\mathcal{M}(X,Y), \mathscr{T}_{p.c.})$ 中是紧的, 从而是闭的（因为 Hausdorff 可乘所以 $(\mathcal{M}(X,Y), \mathscr{T}_{p.c.})$ 是 Hausdorff 的）. 因为
  $$\mathcal{F} \subset \prod_{a\in X} \mathcal{F}_a \subset \prod_{a\in X} K_a,$$
  它的闭包 $\mathcal{K} \subset \prod\limits_{a\in X} K_a$. 作为紧集 $\prod\limits_{a\in X} K_a$ 的闭子集, 在 $(\prod\limits_{a\in X} K_a, \mathscr{T}_{subspace})$ 中是紧的, 易知在 $(\mathcal{M}(X,Y), \mathscr{T}_{p.c.})$ 中也是紧的.

(2) $(\mathcal{M}(X,Y), \mathscr{T}_{p.c.})$ 和 $(\mathcal{C}(X,Y), \mathscr{T}_{c.c.})$ 在 $\mathcal{K}$ 上诱导的子空间拓扑是一致的.

- $\mathcal{K} \subset \mathcal{C}(X,Y) \subset \mathcal{M}(X,Y)$, 所以 $(\mathcal{C}(X,Y), \mathscr{T}_{c.c.})$ 和 $(\mathcal{M}(X,Y), \mathscr{T}_{c.c.})$ 在 $\mathcal{K}$ 上诱导的子空间拓扑是一致的. 而对于 $\mathcal{M}(X,Y)$,$\mathscr{T}_{p.c.} \subset \mathscr{T}_{c.c.}$, 因此我们只需要证明 $(\mathcal{C}(X,Y), \mathscr{T}_{c.c.})$ 在 $\mathcal{K}$ 上诱导的拓扑含于 $(\mathcal{M}(X,Y), \mathscr{T}_{p.c.})$ 诱导的拓扑.
- 任意 U 是 $(\mathcal{M}(X,Y), \mathscr{T}_{c.c.})$ 中的开集,$U \cap \mathcal{K}$, 任意 $f \in U \cap \mathcal{K}$, 要找 $(\mathcal{M}(X,Y), \mathscr{T}_{p.c.})$ 中开集 V, 使得 $f \in V \cap \mathcal{K} \subset U \cap \mathcal{K}$.
  不难看出上面的 U 可以取成基 $B(g, K, \varepsilon)$ 的形式, 其中 $f \in B(g, K, \varepsilon)$.
  因为 $\mathcal{K}$ 是等度连续的,K 是紧的, 所以我们可以找到有限多个 x_i 和 V_i 覆盖 K, 使得
  $$d(\tilde{g}(x,), \tilde{g}(x_i)) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall\, \tilde{g} \in \mathcal{K}, \forall\, x \in V_i.$$
  所以我们就取 $V = \omega(g; x_1, \cdots, x_n, \varepsilon)$, 容易验证 $f \in V \cap \mathcal{K} \subset U \cap \mathcal{K}$.

(3) $\mathcal{K}$ 也是 $\mathcal{F}$ 在 $(\mathcal{C}(X,Y), \mathscr{T}_{c.c.})$ 中的闭包.

- 任意 $g \in \mathcal{K}$, 任意 g 在 $(\mathcal{C}(X,Y), \mathscr{T}_{c.c.})$ 中的开邻域 U, 存在 g 在 $(\mathcal{M}(X,Y), \mathscr{T}_{p.c.})$ 中的开邻域 V, 使得 $V \cap \mathcal{K} = U \cap \mathcal{K}$. 所以
  $$U \cap \mathcal{F} = U \cap \mathcal{K} \cap \mathcal{F} = V \cap \mathcal{K} \cap \mathcal{F} = V \cap \mathcal{F} \neq \varnothing.$$
- 任意 $g \in \mathcal{C}(X,Y) \backslash \mathcal{K}$, 存在 g 在 $(\mathcal{M}(X,Y), \mathscr{T}_{p.c.})$ 中的开邻域 V, 使得 $V \cap \mathcal{F} = \varnothing$. 存在 g 在 $(\mathcal{C}(X,Y), \mathscr{T}_{c.c.})$ 中的开邻域 U, 使得 $U \cap \mathcal{K} = V \cap \mathcal{K}$, 所以
  $$U \cap \mathcal{F} = U \cap \mathcal{K} \cap \mathcal{F} = V \cap \mathcal{K} \cap \mathcal{F} = V \cap \mathcal{F} = \varnothing.$$

(4) 现在假设 X 是 LCH 的, 设 $\mathcal{F}$ 在 $(\mathcal{C}(X,Y),\mathscr{T}_{c.c.})$ 中的闭包 $\mathcal{K}$ 中的闭包是紧的. 我们将证明 $\mathcal{K}$ 是等度连续且逐点紧的, 这就蕴含着 $\mathcal{F}$ 是等度连续且逐点预紧的.

□

10.5 一些特殊情况和应用

注意在这个非常一般的版本中结论是相当弱的, 因为在一般的情形中 $\mathscr{T}_{c.c.}$ 不一定是可度量化的, 从而紧并不意味着序列紧. 因此对于一个等度连续和逐点预紧的序列, 我们不能得出存在收敛子列的结论. 但是, 这里有许多我们能够得出收敛子列的存在性的有趣/重要的情形.

(a) 我们知道如果 X 是紧的, 那么 $\mathscr{T}_{c.c.}=\mathscr{T}_{u.c.}$. 而 $\mathscr{T}_{u.c.}$ 是可度量化的, 所以紧性蕴含着序列紧性. 特别地我们得到

定理 10.10 (紧空间上的映射的 Arzela-Ascoli)**.** *设 X 是紧的,(Y,d) 是度量空间. 设 $\mathcal{F}\subset\mathcal{C}(X,Y)$ 等度连续且逐点预紧. 那么 $\mathcal{F}$ 中的任意序列都有收敛子列在 X 上一致收敛.*

因为在 $\mathbb{R}^n$ 中, 一个集合是预紧的当且仅当它是有界的, 我们得到

推论 10.11 (紧空间上的函数的 Arzela-Ascoli)**.** *设 X 是紧的. 设 $\mathcal{F}\subset\mathcal{C}(X,\mathbb{R}^n)$ 等度连续且逐点有界. 那么 $\mathcal{F}$ 中的任意序列都有收敛子列在 X 上一致收敛.*

(b) 对于局部紧空间的情形, 每个点都有一个紧邻域. 显然如果 $\mathcal{F}$ 是等度连续/逐点预紧的, 那么它限制在这样一个紧邻域上也是等度连续/逐点预紧的. 所以如果 X 是局部紧的, 那么对于任意序列 $\{f_n\}$ 等都连续且逐点预紧, 对任意 x, 存在 x 的一个紧邻域, 在其上 $\{f_n\}$ 有一个收敛子列. 不幸的是这不足以断言序列 $\{f_n\}$ 在 $\mathscr{T}_{c.c.}$ 中有一个收敛子列, 因为在 X 中可能有"太多"紧集. 但是, 如果我们假定 X 是 σ-紧的, 即,X 是紧集的克列并, 那么我们可以应用标准的对角线技巧来得到一个在每个紧集上都一致收敛的子列:

定理 10.12.

注记. *Arzela-Ascoli 定理被广泛的运用于分析中. 下面是你能在其他课程中学到的标准应用:*

- *泛函分析: Frechet-Kolmogorov-Riesz 紧性定理*
- *PDE: Sobolev 嵌入定理*
- *ODE: Peano 存在性定理*
- *复分析: Montel 定理*
- *泛函分析/Lie 理论: Peter-Weyl 定理*

最后, 我们指出利用凸几何中的一些标准事实, 我们能够证明下面的归功于 Wilhelm Blaschke 的在凸几何非常有用的定理.

定理 10.13 (Blaschke selection theorem)**.** *对任意 $R>0$, 所有包含在 $B(0,R)$ 中的非空紧凸集关于 $\mathscr{T}_{d_H}$ 是紧的.*

10.6 title

定理 10.14 (Arzela-Ascoli-classical)**.** 考虑 $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, 设 $\mathscr{F}$ 是一致有界且等度连续的, 那么任意序列都有一致收敛的子列.

例 10.15.

- $f_n(x) = n$, 等度连续但不一致有界. 无收敛子列.
- $f_n(x) = x^n, x \in [0,1]$, 一致有界但不等度连续. 无收敛子列.

要推广到拓扑空间中. 从度量空间到拓扑空间一般是把开球换成开集.

定义 10.16. $(X,\mathscr{T}),(Y,d)$, 我们称 $\mathscr{F} \subset \mathcal{C}(X,Y)$ 等度连续, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在开集 U 使得 $x_0 \in U$ 使得 $d_Y(f(x),f(x_0)) < \varepsilon, \forall f \in \mathscr{F}, \forall x \in U$

在 X 上等度连续就是处处等度连续.

命题 10.17. 如果 $\mathscr{F} \subset (\mathcal{C}(X,Y),d_u)$ 是完全有界的, 那么它是等度连续的.

证明. 存在有限个函数 $\{f_1,\cdots,f_n\}$, 对任意 $f \in \mathscr{F}$, 存在 k 使得 $\sup d_Y(f_k,f) < \varepsilon$.

取 $U = \bigcap_{k=1}^{\infty} f_k^{-1}(B_Y(f_k(x_0),\varepsilon))$, 任意 $x \in U$, 任意 $f \in \mathscr{F}$,$d_Y(f(x),f(x_0)) \leqslant d_Y(f_k(x),f(x)) + d_Y(f_k(x),f_k(x_0) + d_Y(f_k(x_0),f(x_0))) < 3\varepsilon$ □

定义 10.18. 令 $\mathscr{F}_a = \{f(a) : f \in \mathscr{F}\}$, 我们称 $\mathscr{F} \subset \mathcal{C}(X,Y)$ 是逐点预紧的, 如果对任意的 $a \in X$,, 那么 $\overline{\mathscr{F}_a}$ 是紧的.

定理 10.19 (一般的 AA)**.** 设 $\mathscr{F} \subset \mathcal{C}(X,Y)$ 是等度连续的而且是逐点预紧的, 那么 $\overline{\mathscr{F}}$ 关于紧收敛拓扑 $\mathscr{T}_{c.c.}$ 被包含在一个紧集里面.

如果 X 是局部紧 *Hausdorff* 的, 那么反过来也对.

证明. 基本想法：$K := \overline{\mathscr{F}}^{p.c.} \supset \overline{\mathscr{F}}^{c.c.}$, 然后我要说明 $\overline{\mathscr{F}}^{p.c.}$ 是紧的. 我在乘积拓扑中比较容易找紧集因为我有 Tychnoff 定理.

第二步是要证 $(K,\mathscr{T}_{p.c.}) = (K,\mathscr{T}_{c.c.})$

- K 是紧的. 由条件,$K_a := \overline{\mathscr{F}}_a$ 在 Y 中是紧的, 而且也是闭的（Y 是度量空间从而 Hausdorff 从而紧子集是闭集）.

  考虑 $\prod_{a\in X} K_a = \bigcap_{a} \in X\pi_a^{-1}(K_a)$ 在 $\mathscr{T}_{p.c.}$ 是紧的, 也是闭的（π_a 是连续映射, 闭集的原像是闭集, 闭集的任意交是闭集）.$\mathscr{F} \subset \prod_a \mathscr{F}_a \subset \prod_{a\in X} K_a$, 所以 $\overline{F} \subset \prod_{a\in X} K_a$（因为右侧是闭的）, 所以 K 是紧集. 因为紧集的闭子集是紧集.

- K 是等度连续的.

  任意 $\varepsilon > 0$, 存在 U 使得 $\forall x \in U$ 满足 $d_Y(f(x),f(x_0)) < \varepsilon, \forall f \in K$. 只需对极限点来做, 找到一个小邻域有 $\mathscr{F}$ 中的点用三角不等式估计.

  特别地,

- $\mathscr{T}_{c.c.} \subset \mathscr{T}_{p.c.}$

  任意 K 紧, 存在 U 在 $\mathscr{T}_{p.c.}$ 中的开集 $K \cap U \subset K \cap B(f,K,\varepsilon)$

- K 是紧的
- K 是连续的.

这两件事告诉我我可以找到有限个点和有限个开邻域使得等度连续的事成立.

□

11 PSet07-1

(1)[More on LCH]

(a) Prove Proposition 1.13 and Proposition 1.17.

Then read part (2) of the proof of Theorem 2.7 on page 10.

(b) [Structure of noncompact LCH] Let K be a compact Hausdorff space, $p \in K$ and $X = K \setminus \{p\}$ is non-compact. Prove: X is a non-compact LCH.

Conversely, suppose X be a non-compact LCH. Let $X^* = X \bigcup \{\infty\}$ be the one-point compactification of X(PSet4-2-4). Prove: X^* is compact and Hausdorff.

(c) [LCH version of Stone-Weierstrass] Let X be a LCH. On X we can define the space of continuous functions vanishing at infinity,

$$\mathcal{C}_0(X,\mathbb{R}) = \left\{ f \in \mathcal{C}(X,\mathbb{R}) \middle| \forall \varepsilon > 0, \exists \text{ compact } K \subset X \text{ s.t. } ||f(x)| < \varepsilon \text{ on } K^c \right\}.$$

We have seen this space for the special LCH $X = \mathbb{R}$ in PSet 6-2-4. Generalize the conclusion of PSet 6-2-4 to general LCH and prove it.

证明.

(a)

命题 11.1. *设 X 是 LCH 的,$K \subset X$ 是紧集,$U \subset X$ 是开集并且满足 $K \subset U$. 那么存在开集 V 使得 $\overline{V}$ 是紧的, 并且 $K \subset V \subset \overline{V} \subset U$.*

证明. □

(b)
- 由于 K 是 Hausdorff 的, 对任意的 $x \in X$, 存在开集 U, V 使得 $x \in U, p \in V$ 并且 $U \cap V = \varnothing$. 则 $x \in U \subset V^c$. 其中 U 是 K 中不包含 p 的开集从而也是 X 中开集.V^c 是 K 中闭集, 由于 K 是紧集, 所以 V^c 也是紧集, 从而也是 X 中紧集（这是因为 K 与 X 在 V^c 上诱导的子空间拓扑是相同的）. 从而 X 是 LCH 的.
-

(c)

□

(2)[More on compact-open topology]
Recall that the compact open topology on $\mathcal{C}(X,Y)$ is generated by sets of the form

$$S(K,U) = \left\{ f \in \mathcal{C}(X,Y) \middle| f(K) \subset U \right\},$$

where K is any compact subset in X and U is any open subset in Y.

(a) Prove: If (Y,d) is a metric space, then $\mathscr{T}_{c.c.} = \mathscr{T}_{c.o.}$.

(b) Prove: If X is locally compact and Hausdorff, then

$$S(\{x\},U)=\bigcup_{\text{compact neighborhood } K \text{ of } x} S(K,U).$$

证明.

(a) • 首先证 $\mathscr{T}_{c.c.}$ 的基中元素 $B(f;K,\varepsilon)$ 是 $\mathscr{T}_{c.o.}$ 中的开集.
只需证（why?）存在有限个 $S(K_i,B(y_i,\varepsilon_i))$ 使得

$$f\in\bigcap_{i=1}^{n}S(K_i,B(y_i,\varepsilon_i))\subset B(f;K,\varepsilon).$$

因为 $f(K)$ 是紧集, 所以可被有限个开球 $B(f(x_i),\varepsilon/3)$ 覆盖, 其中 $1\leqslant i\leqslant n$.
考虑 $K_i:=K\cap f^{-1}(\overline{B(f(x_i),\varepsilon/3)})$, 显然 $K=\bigcup_{i=1}^{n}K_i$.
在 K_i 上,$f(x)$ 的振幅不太大, 即 $f(K_i)\subset\overline{B(f(x_i),\varepsilon/3)}\subset B(f(x_i),2\varepsilon/3)$.
考虑 $S(K_i,B(f(x_i),2\varepsilon/3))$, 断言

$$f\in\bigcap_{i=1}^{n}S(K_i,B(f(x_i),2\varepsilon/3))\subset B(f;K,\varepsilon).$$

任取 $g\in\bigcap_{i=1}^{n}S(K_i,B(f(x_i),2\varepsilon/3))$, 任取 $x\in K$, 存在 i 使得 $x\in K_i$,

$$d(g(x),f(x))\leqslant d(g(x),f(x_i))+d(f(x_i),f(x))<\frac{2\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}<\varepsilon.$$

• 下证 $\mathscr{T}_{c.o.}$ 的子基中元素 $S(K,B(y,\varepsilon))$ 是 $\mathscr{T}_{c.c.}$ 中的开集.
任取 $f\in S(K,B(y,\varepsilon))$, 记 $\delta=d(f(K),B^c(y,\varepsilon))$, 则

$$f\in B(f;K,\delta/2)\subset S(K,B(y,\varepsilon)).$$

(b) • 显然 $S(K,U)\subset S(\{x\},U)$, 因此 $\bigcup_{\text{compact neighborhood } K \text{ of } x} S(K,U)\subset S(\{x\},U)$

• 若 $f(x)\in U$, 由 f 连续, 存在 x 的开邻域 V 使得 $f(V)\subset U$, 由 X 局部紧 Hausdorff, 存在 x 的开邻域 W 使得 $x\in W\subset\overline{W}\subset V$, 则 $f\in S(\overline{W},U)$.

□

(3)[The evaluation map could fail to be continuous without local compactness]
Consider the evaluation map

$$e:\mathbb{Q}\times\mathcal{C}(\mathbb{Q},[0,1])\to[0,1],\quad (x,f)\mapsto e(x,f)=f(x).$$

(a) Explain why $\mathbb{Q}$ is not locally compact.

(b) Prove: for any $q_1\in\mathbb{Q}$ and any closed subset $A\subset\mathbb{Q}$ with $q_1\in A$, there is a continuous function $f_1\in\mathcal{C}(\mathbb{Q},[0,1])$ such that $f(q_1)=1, f(A)=0$.

(c) Now let $f_0 \in \mathcal{C}(\mathbb{Q}, [0,1])$ be the zero map $f_0(\mathbb{Q}) = 0$, and take any $q_0 \in \mathbb{Q}$. Prove: e is not continuous at (q_0, f_0)(where we endow $\mathcal{C}(\mathbb{Q}, [0,1])$ with the compact convergence topology).

(4)[Applications of Arzela-Ascoli]

(a) Suppose $k = k(x,y) \in \mathcal{C}([0,1] \times [0,1], R)$. For any $f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, define

$$Kf(x) = \int_0^1 k(x,y) f(y).$$

Prove: K is a compact operator, i.e. it maps any bounded subset in $(\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}), d_u)$ into a compact subset in the same space.

(b) We want to minimize the functional $\Phi[f] := \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)$. Consider the set

$$\mathcal{F} = \left\{ f \in \mathcal{C}([-1,1],[0,1]) \middle| f(-1) = f(1) = 1 \right\}.$$

(i) What is $\inf\limits_{f \in \mathcal{F}} \Phi[f]$?Is the infimum attained?

(ii) For any constant $C > 0$, let

$$\mathcal{F}_C = \left\{ f \in \mathcal{F} \middle| |f(x) - f(y)| \leqslant C|x-y| \right\}.$$

Prove: The $\inf\limits_{f \in \mathcal{F}_C} \Phi|f|$ is attained. Can you find the function?

12 可数性公理

正如我们看到的, 紧性能够被视为有限性的“连续版本”. 我们能够将紧空间视作能够用有限个开集拼凑起来的空间. 有限性之所以重要是因为它允许我们亲自构造东西, 结果是对于紧空间我们能从局部的结果得到整体上的结果.

现在我们转向可数性. 在拓扑中, 一个可数性公理是一个断言具有某种性质的可数集合的存在性的拓扑性质. 有若干不同的拓扑性质描述可数性.

12.1 第一可数空间

让我们回忆

定义 12.1. 一个拓扑空间 $(X, \mathscr{T})$ 称作是第一可数的, 或 *(A1)* 空间, 如果每点有可数的邻域基, 即, 对于任意 $x \in X$, 存在 x 的可数开邻域 $\{U_1^x, U_2^x, \cdots\}$, 使得对 x 的任意开邻域 U, 存在 n 使得 $U_n^x \subset U$.

注记. 如果 $(X, \mathscr{T})$ 是第一可数的, 那么对于每点我们可以选择一组可数邻域基 $\{U_n^x\}$ 满足

$$U_1^x \supset U_2^x \supset U_3^x \supset \cdots,$$

因为如果我们有 x 的一组可数邻域基 $V_1^x, V_2^x, \cdots$, 那么我们可以取

$$U_1^x = V_1^x, U_2^x = V_1^x \cap V_2^x, U_3^x = V_1^x \cap V_2^x \cap V_3^x, \cdots.$$

我们已经看到

命题 12.2. 如果 $(X, \mathscr{T})$ 是第一可数的, 那么

(1) 极限点是序列极限.

- $A \subset X$ 是闭集当且仅当 A 包含所有的序列极限.

(2) 序列连续 $\Longrightarrow$ 连续.

(3) 如果 $(X, \mathscr{T})$ 还是 *Hausdorff* 的, 那么极限点紧 $\Longrightarrow$ 序列紧 $\Longrightarrow$ 闭.

下面是一些第一可数空间和不是第一可数空间的例子：

例 12.3.

(1) 任意度量空间是第一可数的, 因为我们可以取 $U_n^x = B(x, \frac{1}{n})$.

(2) *Sorgenfrey* 直线是第一可数的, 其中 $U_n^x = [x, x + \frac{1}{n})$.

- 第一可数的例子
  - 度量空间.
  - Sorgenfrey 直线.

例 12.4. $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_{cocountable})$ 不是第一可数的.
由反证法, 假设 $U_x^1, \cdots, U_x^n$ 是 X 的邻域.$\bigcap U_x^i - \{z\}$

12.2 第二可数空间

- 定义：存在可数基.
- 第二可数 $\Longrightarrow$ 第一可数
  - 反之不对, 如赋予离散拓扑的任意不可数集, 如 Sorgenfrey 直线.
- 完全有界 + 度量空间 $\Longrightarrow$ 第二可数
  - 紧 + 度量空间 $\Longrightarrow$ 第二可数

例 12.5. $(\mathbb{R}^n, \mathscr{T}_{Euclidean})$
$\mathcal{B} = \{B(x_n, r_n) \big| x \in \mathbb{Q}^n, r_n \in \mathbb{Q}\}$.

例 12.6. $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_{discrete})$ 是 $(A1)$ 的但不是 $(A2)$ 的.

命题 12.7. 完全有界度量空间是第二可数的.

证明. 设 (X, d) 是完全有界的.

按定义, 我们有有限 $\frac{1}{n}$-网, 即存在有限多个点 $x_{n,1}, x_{n,2}, \cdots, x_{n,k(n)} \in X$ 使得 $X = \bigcup_{i=1}^{k(n)} B(x_{n,i}, \frac{1}{n})$.
断言可数族 $\mathcal{B} := \left\{B(x_{n,i}, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}, 1 \leqslant i \leqslant k(n)\right\}$ 是度量空间 $(X, \mathscr{T})$ 的基.

任取开集 U 和点 $x \in U$, 存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $B(x, \varepsilon) \subset U$. 选取 $n \in \mathbb{N}$ 和 $1 \leqslant i \leqslant k(n)$ 使得 $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$ 且 $d(x, x_{n,i}) < \frac{1}{n}$, 从而 $B(x_{n,i}, \frac{1}{n}) \subset B(x, \frac{2}{n}) \subset B(x, \varepsilon) \subset U$. 因此 $\mathcal{B}$ 是基. $\square$

因为任意紧度量空间是完全有界的, 我们得到

推论 12.8. 紧度量空间是第二可数的.

例 12.9. $X = [0,1]^{\mathbb{N}}$

- $(X, \mathscr{T}_{product})$ 是 $(A2)$.

  赋予 X 度量 $d((x_n),(y_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}|x^n - y^n|$.

- $(X, \mathscr{T}_{box})$ 不是 $(A1)$ 的.

  假设 $x = (x_n)$ 有可数邻域基. 找对角线那一列, 每一个都缩小一点点

12.3 可分空间

- 定义：有可数稠密子集.
- 第二可数 $\implies$ 可分.
  - 反之不对, 如 Sorgenfrey 直线.

如果你认真思考我们在欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 中构造的可数基, 也就是

$$\mathcal{B} = \left\{ B(x,r) \middle| x \in \mathbb{Q}^n, r \in \mathbb{Q}_{>0} \right\},$$

你将发现一个重要的原因是 $\mathbb{R}^n$ 有可数稠密子集 $\mathbb{Q}^n$. 结果是这是许多第二可数空间的共同特征：

命题 12.10. 任意第二可数空间有可数稠密子集.

证明. 设 $\{U_n | n \in \mathbb{N}\}$ 是 $(X, \mathscr{T})$ 的可数基. 对于每个 n, 选择一点 $x_n \in U_n$ 并且令 $A = \{x_n | n \in \mathbb{N}\}$（这里用到了可数选择公理！）. 那么 A 是 X 中的可数子集.

断言 $\overline{A} = X$. 事实上, 对于任意 $x \in X$ 和 x 的任意开邻域 U, 存在 n 使得 $x \in U_n \subset U$. 从而 $U \cap A \neq \varnothing$, 所以 $\overline{A} = X$. □

注记. 我们实际上证明了：在任意拓扑空间中, 存在势不超过基的势的可数稠密子集. 当然, 证明中要用到更一般的选择公理.

定义 12.11 (可分,separable)**.** 我们称 X 是可分的如果它有一个可数稠密子集.

例 12.12. $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_{Sorgenfrey})$ 是可分的. 有理数稠密. 但它不是第二可数的.

命题 12.13. 可分度量空间是第二可数的, 从而在度量空间中第二可数 $\iff$ 可分.

注记. 可分性是泛函分析中一个非常有用的概念. 它被用于证明某些紧性的结果. 另一个著名的结果是“希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 可分 $\iff$ 它有可数正交基”. 从该事实出发容易构造出不可分的希尔伯特空间. 例如, 令

$$\widetilde{l^2(\mathbb{R})} = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \middle| f(x) \neq 0 \textit{ for countably many } x, \textit{ and } \sum_x |f(x)|^2 < \infty \right\}.$$

赋予内积 $\langle f, g \rangle := \sum_{x \in \mathbb{R}} f(x)g(x)$ 后它是一个内积空间, 从而诱导了一个度量结构, 而度量空间可以被完备化. 最终得到的希尔伯特空间不可能有任意可数正交基.

12.4 希尔伯特方体作为所有紧致度量空间的万有模型

粗略地说, 可分性意味着你能够用可数多的数据来“还原”整个空间.

定理 12.14. *任何紧致度量空间 (X, d_X) 可以拓扑嵌入到希尔伯特方体 $\big([0,1]^{\mathbb{N}}, d\big)$ 作为闭子空间.*

证明. 因为 X 是紧的, 所以它是有界的. 通过伸缩 d_X, 我们可以假设 $\mathrm{diam}(X) \leqslant 1$.

设 $A = \big\{x_n \big| n \in \mathbb{N}\big\}$ 是 X 的可数稠密子集, 我们定义

$$F : X \longrightarrow [0,1]^{\mathbb{N}}, \quad x \longmapsto (d(x, x_1), d(x, x_2), \cdots).$$

那么我们有

- F 是连续的因为 $\mathscr{T}_d = \mathscr{T}_{product}$, 每个 $\pi_n \circ F = d(x, x_n)$ 是连续的.
- F 是单射：如果 $F(x) = F(y)$, 那么 $d(x, x_n) = d(y, x_n)$. 因为 A 是稠密的, 存在 $x_{n_k} \to x$. 由 d 的连续性,
$$d(x, y) = \lim_{k\to\infty} d(x_{n_k}, y) = \lim_{k\to\infty} d(x_n, x) = 0.$$
- $([0,1]^{\mathbb{N}}, \mathscr{T}_{product})$ 是 Hausdorff 的因为它是度量空间.

从而映射

$$F : X \to F(X) \subset [0,1]^{\mathbb{N}}$$

是同胚. 显然,$F(X)$ 是闭的, 因为它是 Hausdorff 空间中的紧子集. □

12.5 其他可数性的概念

可数性总是与紧性结合在一起. 例如, 我们已经在 PSet 4-2-3 中看到可数紧的概念, 并且我们在 Lec12 中看到 $\sigma-$ 紧的概念. 另一个有这种风格的可数性的概念是

定义 12.15. *拓扑空间 $(X, \mathscr{T})$ 是 Lindelöf 的, 如果任意开覆盖都有可数子覆盖.*

显然 σ-紧蕴含 Lindelöf, 而 Lindelöf 加可数紧蕴含紧. 我们会将一些性质留做习题.

13 可度量化

13.1 可度量化

定义 13.1. 称 $(X, \mathscr{T})$ 是可度量化的，如果存在 X 上的度量结构 d 使得 $\mathscr{T} = \mathscr{T}_d$.

例 13.2. $([0,1]^{\mathbb{N}}, \mathscr{T}_{product})$ 是可度量化的，而 $([0,1]^{\mathbb{N}}, \mathscr{T}_{box})$ 是不可度量化的，因为它不是第一可数的.

我们已经在 Lec9 中看到任意可度量化拓扑空间必须是第一可数、Hausdorff 和正规的. 但是, 这些条件不是充分的.

例 13.3. *Sorgenfrey* 直线 $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_{Sorgenfrey})$ 是第一可数、*Hausdorff* 和正规的但不是可度量化的.

- 我们已经看到 $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_{Sorgenfrey})$ 是第一可数的.
- 它不可度量化因为它是可分的却不是第二可数的.
- 它是 *Hausdorff* 的因为任意 $x < y$ 可以被开集 $[x, y)$ 和 $[y, y+1)$ 分开.
- 仍需证明 $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_{Sorgenfrey})$ 是正规的，即不交闭集可以被不交开集分离. 设 A, B 是不交闭集. 对于任意 $a \in A$，有 $a \notin B^c$. 因为 B^c 是开集，我们可以取 $\varepsilon_a > 0$ 使得 $[a, a+\varepsilon) \subset B^c$. 类似的对于任意 $b \in B$ 我们可以取 $\varepsilon_b > 0$ 使得 $[b, b+\varepsilon_b] \subset A^c$.

  注意到我们总是有 $[a, a+\varepsilon_a) \cap [b, b+\varepsilon_b) = \varnothing$. 否则我们有 $b \in [a, a+\varepsilon_a) \cap [b, b+\varepsilon_b)$，矛盾.

  从而 $U_A : \bigcup_{a \in A} [a, a+\varepsilon_a)$,$U_B := \bigcup_{b \in B} [b, b+\varepsilon_b)$ 是分离 A 和 B 的不交闭集.

13.2 Urysohn 度量化定理

尽管一般来说可度量化问题是复杂的, 对于第二可数空间我们有一个非常简单的答案.

定理 13.4. 一个第二可数的拓扑空间 $(X, \mathscr{T})$ 是可度量化的当且仅当它是 *Hausdorff* 和正规的.

下次我们将看到任意紧 Hausdorff 空间是正规的. 因此

推论 13.5. 紧 *Hausdorff* 空间是可度量化的当且仅当它是第二可数的.

注记. 我们不能将 *Urysohn* 度量化定理中的第二可数的假定替换为可分，正如我们在反例 $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_{Sorgenfrey})$ 中看到的. 同样如果我们将第二可数替换为可分，推论也不在成立，至于反例，可参见*Split interval*

13.3 Urysohn 度量化定理：证明

引理 13.6 (Urysohn Lemma)**.** $(X, \mathscr{T})$ 是正规的当且仅当对任意不交闭集 $A, B \subset X$，存在连续函数 $f : X \to [0,1]$ 使得 $f(A) = 0, f(B) = 1$.

14 PSet07-2

(1)[Lindelöff Property]
We say $(X, \mathscr{T})$ is *Lindelöff* if any open covering admits a countable sub-covering.

(a) Prove: Any second countable topological space is Lindelöff.

(b) Prove: A metric space is second countable if and only if it is Lindelöff.

(c) Prove: Any closed subspace of a Lindelöff space is still Lindelöff.

(d) Check: $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_{cocountable})$ is Lindelöff.

(e) Check: The Sorgenfrey line $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_{Sorgenfrey})$ is Lindelöff.

证明.

(a) 设 $(X, \mathscr{T})$ 是第二可数的, 那么有可数基 $\mathcal{B}$. 任取 $(X, \mathscr{T})$ 的开覆盖 $\mathcal{U}$. 对任意 $x \in X$, 存在 $U_x \in \mathcal{U}, B_x \in \mathcal{B}$ 使得 $x \in B_x \subset U_x$. 而我们可以找到可数个 $\{x_n\}$, 使得 $\{B_{x_n}\}$ 是一族开覆盖. 从而对应的 $\{U_{x_n}\}$ 也是一族可数开覆盖.

(b) 证明完全类似于讲义中完全有界度量空间是第二可数的的证明, 只不过可数集的可数并替代了有限集的可数并.

(c) 设 $A \subset X$ 是闭集. 任取 A 的开覆盖 $\mathcal{U}$, 考虑 $\mathcal{U} \cup A^c$, 这是 X 的开覆盖. 由于 X 是 Lindelöff 的, 所以存在可数子覆盖 $\mathcal{V}$. 因为 $A \cap A^c = \varnothing$, 所以 $\mathcal{V} \setminus \{A^c\}$ 是 A 的可数开覆盖, 从而 A 是 Lindelöff 的.

(d) 任取 $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_{cocountable})$ 的开覆盖 $\mathcal{U}$, 任取 $U_0 \in \mathcal{U}$. 则 U_0^c 是一个可数集 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. 对每个 x_n 找到 $\mathcal{U}$ 中的一个元素 U_n 使得 $x_n \in U_n$, 这样 $\{U_n\}_{n=0}^{\infty}$ 就构成可数开覆盖.

(e)

□

(2)[The Sorgenfrey plane]
Consider the product of two Sorgenfrey lines,

$$(\mathbb{R}^2, \mathscr{T}_{Sorgenfrey}) := (\mathbb{R}, \mathscr{T}_{Sorgenfrey}) \times (\mathbb{R}, \mathscr{T}_{Sorgenfrey}),$$

which is known as the *Sorgenfrey plane*.

(a) Prove: It is first countable, separable but not second countable.

(b) Prove: Is it Hausdorff? Is it metrizable?

(c) Consider the subspces $A = \big\{(x, -x) \big| x \in \mathbb{R}\big\}$. Is it closed? What is the induced subspace topology on A?

(d) Prove: It is not Lindelöf.

证明.

(a)
- 对于 $(x,y)\in\mathbb{R}^2,\left\{[x,x+\frac{1}{n})\times[y,y+\frac{1}{m})\big|n,m\in\mathbb{N}\right\}$ 是可数邻域基.
-
- 由于第二可数是可遗传的,$(\mathbb{R},\mathscr{T}_{Sorgenfrey})$ 不是第二可数的, 从而 $(\mathbb{R}^2,\mathscr{T}_{Sorgenfrey})$ 不是第二可数的.

(b)
- 对于 $(x_1,y_1)\neq(x_2,y_2)$, 设二者的欧式距离为 $d>0$, 考虑两个以 $\frac{d}{3}$ 为边长, 以两点为中心的正方形, 便将两个点分离开来, 容易找到 $(\mathbb{R}^2,\mathscr{T}_{Sorgenfrey})$ 中的两个开集使得它们在 $(\mathbb{R}_2,\mathscr{T}_{usual})$ 中的闭包正是上面的正方形, 从而这两个开集也互不相交.
- 因为 $(\mathbb{R}^2,\mathscr{T}_{Sorgenfrey})$ 可分但不第二可数, 因此它是不可度量化的.

(c) 类似证明 $(\mathbb{R}^2,\mathscr{T}_{Sorgenfrey})$ 是 Hausdorff 的, 容易证明 A^c 是开的, 从而 A 是闭的.

子空间拓扑是离散拓扑.

(d) 任取 $(\mathbb{R}^2,\mathscr{T}_{Sorgenfrey})$ 的一个开覆盖 $\mathcal{U}$, 由于 A^c 是开集, 让 $\mathcal{U}$ 中的每一个元素都与 A^c 作交运算, 将得到的集合记为 $\mathcal{V}$,$\mathcal{V}$ 中的每个元素都是 $(\mathbb{R}^2,\mathscr{T}_{Sorgenfrey})$ 中的开集, 并且 $\bigcup_{V\in\mathcal{V}}V=A^c$. 考虑以点 $(x,-x)$ 为顶点的开集 $W_x=[x,x+1)\times[-x,-x+1)$, 显然它不包含 A 中的其它点. 而 $\mathcal{V}\cup\left\{W_x\big|x\in\mathbb{R}\right\}$ 构成 $(\mathbb{R}^2,\mathscr{T}_{Sorgenfrey})$ 的开覆盖, 但它没有可数子覆盖.

□

(3)[Hereditary properties]

A topological property P is called *hereditary* if $(X,\mathscr{T})$ satisfies $P\Longrightarrow$ Any subspace Y of X satisfies P. For example,"metrizable" is hereditary.

(a) Prove: (A1) and (A2) are hereditary.

(b) Is (T2) hereditary? Is compact hereditary? Is "separable" hereditary? Is (T4) hereditary?

(c) Prove: Lindelöf is not hereditary.

(d) A topological property P is called *closed hereditary* if $(X,\mathscr{T})$ satisfies $P\Longrightarrow$ Any closed subspace Y of X satisfies P. For those non-hereditary properties above, determine whether they are closed hereditary.

证明.

(a)
- 因为对于 $A\subset B$,$A\cap C\subset B\cap C$, 所以 (A1) 是可遗传的.
- 出于同样的理由,(A2) 也是可遗传的.

(b)
- 因为对于 $U\cap V=\varnothing$,$(U\cap A)\cap(V\cap A)=\varnothing$, 所以 (T2) 是可遗传的.
- 紧性不可遗传. 比如 $[0,1]$ 是紧的但 $(0,1)$ 非紧.
- 可分性不可遗传. 反例是上一题 (c).
- (T4) 不可遗传.

(c) 任取一个非 Lindelöf 空间 X, 考虑它的单点紧化 X^*.X^* 是紧的从而是 Lindelöf 的. 容易验证 X 的拓扑与 X 继承 X^* 的子空间拓扑是一致的, 从而 Lindelöf 不是可遗传的.

(d)
- 紧性是闭遗传的.
- 可分性不是闭遗传的. 反例依旧是上一题 (c).
- (T4) 是闭遗传的. 对任意闭子空间中的不交闭集, 它们同样是原空间中的不交闭集, 因为原空间是 (T4) 的, 所以存在原空间中的不交开集分离它们, 将这两个不交开集与该闭子空间交一下便得到闭子空间中分离这两个不交闭集的不交开集.
- Lindelöf 是闭遗传的.

(e) 局部紧不可遗传. 考虑 $X := \{(0,0)\} \cup \big\{(x,y)\big|x>0\big\} \subset \mathbb{R}^2$,$X$ 不是局部紧的.

- 紧性
  - 紧性, 不可遗传, 可闭遗传
  - 局部紧, 不可遗传
  - Lindelöf, 不可遗传
  - 可数紧
  - σ-紧
- 可数性
  - A1, 可遗传
  - A2, 可遗传
  - 可分性, 不可遗传
- 分离性
  - T1, 可遗传
  - T2, 可遗传
  - T3, 可遗传
  - T4, 不可遗传, 可闭遗传

□

(4)[Properties preserved by continuous maps]
We say a topological property P is *preserved under continuous maps if* $(X,\mathscr{T})$ satisfies P, $f: X\to Y$ is continuous $\Longrightarrow f(X)$ satisfies P.Similarly one can define the meaning of preserved under continuous open maps.

(a) Prove: The properties “Lindelof”,“separable”,“countably compact”,“σ-compact” are preserved under continuous maps.

(b) Prove: The properties “A1”,“A2”,“locally compact” are preserved under continuous open maps. Are they preserved under continuous maps?

证明.

(a)
- Lindelof 和可数紧的证明方法与紧的证明方法完全相同.
- σ-紧是显然的.
- 可分. 设 A 是 X 的可数稠密子集. 显然 $f(A)$ 也是可数的.
  由 f 是连续的,$f(X) = f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}_Y . \overline{f(A)}_{f(X)} = \overline{f(A)}_Y \cap f(X) = f(X)$.
  因此 $f(A)$ 是 $f(X)$ 的可数稠密子集.

(b)
-
-
-
-
-
- 局部紧的连续像不是局部紧的. 设 $V := \{-1\} \cup (0,1], f : V \to T, f(-1) = (0,0), f(x) = (x, \sin(1/x))$, 但拓扑学家正弦曲线不是局部紧的.
- 仿紧空间的连续像不一定是仿紧的.
- 极限点紧的连续像不一定是极限点紧的.

□

15 分离性公理和 Urysohn 引理

15.1 四条分离性公理

当我们提到“分离公理”, 我们指的是拓扑空间的有关用不交开集去分离某些不交集合的性质. 有许多不同的分离性公理, 其中有四个是最常用的, 我们也已经见过了最重要的两个：

- (T1=Frechet) 任意 $x_1 \neq x_2 \in X$, 存在开集 U, V 使得 $x_1 \in U \backslash V$ 且 $x_2 \in V \backslash U$.
- (T2=Hausdorff) 任意 $x_1 \neq x_2$, 存在开集 U, V 使得 $x_1 \in U, x_2 \in V$ 并且 $U \cap V = \varnothing$.
- (T3=Regular) 任意闭集 A 和 A 外一点 x, 存在开集 U, V 使得 $A \subset U, x \in V$ 并且 $U \cap V = \varnothing$.
- (T4=Normal) 任意闭集 A 和 B 满足 $A \cap B = \varnothing$, 存在开集 U, V 使得 $A \subset U, B \subset V$ 且 $U \cap V = \varnothing$.

注记. *在不同的书中,“正则”、“(T3)”、“正规”、“(T4)”可能有不同的含义. 例如, 在某些书中,“正则”或“(T3)”可能意味着我们语境中的“(T1)”且“(T3)”,“正规”或“(T4)”可能意味着我们语境中的“(T1)”且“(T4)”; 在其他一些书中,“正则”有着和我们一样的意思, 而“(T3)”意味着我们语境中的“(T1)”且“(T3)”,“正规”和“(T4)”的意义是类似的.*

15.2 不同分离性公理之间的关系

我们也能研究这些公理之间的关系. 显然我们有

- (T2)$\Longrightarrow$(T1)

- (T1)+(T3)$\Longrightarrow$(T2),(T1)+(T4)$\Longrightarrow$(T2),(T1)+(T4)$\Longrightarrow$(T3)

  除了以上各条之外, 其余关系都不成立

- (T1)$\not\Rightarrow$(T2),(T1)$\not\Rightarrow$(T3),(T1)$\not\Rightarrow$(T4)

  反例：$(\mathbb{R}, \mathscr{T}_{cofinite})$.

- (T4)$\not\Rightarrow$(T3),(T4)$\not\Rightarrow$(T2),(T4)$\not\Rightarrow$(T1)

  反例：$(\mathbb{R}, \mathscr{T}_{u.s.c})$, 其中 $\mathscr{T}_{u.s.c}$ 是由子基 $\big\{(-\infty, a)\big|a \in \mathbb{R}\big\}$ 生成的拓扑.

  注意, 它 T4 是因为根本不存在不交闭集!

- (T3)$\not\Rightarrow$(T2),(T3)$\not\Rightarrow$(T1)

  反例：

15.3 等价刻画

首先我们给出这些公理的一些等价刻画：

命题 15.1. *设 $(X, \mathscr{T})$ 是拓扑空间.*

(1) *$(X, \mathscr{T})$ 是 (T1) 的当且仅当任意独立点集 $\{x\}$ 是闭集.*

(2) *$(X, \mathscr{T})$ 是 (T2) 的当且仅当对角线 $\Delta = \big\{(x, x)\big|x \in X\big\}$ 在 $X \times X$ 中是闭集.*

(3) *$(X, \mathscr{T})$ 是 (T3) 的当且仅当对任意 $x \in U$, 其中 U 是开集, 存在开集 V 使得 $x \in V \subset \overline{V} \subset U$.*

(4) *$(X, \mathscr{T})$ 是 (T4) 的当且仅当对任意闭集 $A \subset U$, 其中 U 是开集, 存在开集 V 使得 $A \subset V \subset \overline{V} \subset U$.*

15.4 Urysohn 引理和它的证明

现在我们利用正规空间的等价刻画来证明 Urysohn 引理. 粗略地说,Urysohn 引理告诉我们“每对不交闭集能被开集分离当且仅当每对不交闭集能被实值连续函数分离”.Urysohn 引理是拓扑中的一个基本而重要的工具, 利用它我们可以构造具有某些性质的连续函数. 例如, 上次我们已经见到了如何利用 Urysohn 引理来证明 Urysohn 可度量化定理.Urysohn 引理的其他重要应用, 包括 Tietze 扩张定理和将流形嵌入到欧式空间. 对于度量空间的情形, 证明十分容易因为我们已经有了一个非常好的连续函数-距离函数. 但是, 对于一般的正规空间, 构造是不平凡的：

定理 15.2 (Urysohn 引理)**.** *拓扑空间 $(X, \mathscr{T})$ 是正规的当且仅当对于任意不交闭集 $A, B \subset X$, 存在一个连续函数 $f : X \to [0, 1]$ 使得*

$$A \subset f^{-1}(0) \quad 且 \quad B \subset f^{-1}(1).$$

证明.

($\Longleftarrow$) 这是容易的部分：如果 $A \subset f^{-1}(0), B \subset f^{-1}(1)$ 对于某个连续函数 $f : X \to [0, 1]$, 那么 $f^{-1}([0, \frac{1}{3}))$ 和 $f^{-1}((\frac{2}{3}, 1])$ 就是 A 和 B 的不交开邻域. 因此 $(X, \mathscr{T})$ 是正规的.

($\Longrightarrow$) 这是困难的部分！我们如何在一个非常一般的拓扑空间上定义连续函数呢？思路：我们能够从一个函数的“等高线”来复现一个函数. 当然, 我们在一般的拓扑空间中没有“线”的概念. 但是：我们首先构造足够多的开集, 作为我们想要的函数的次水平集. **Step 1:**Contruct sub-level sets.

假设我们由一个闭集 A 含于开集 U. 我们定义 $A_0=A$,$U_1=U$. 因为 X 是正规的, 所以我们能够找到开集 $U_{\frac{1}{2}}$ 和闭集 $A_{\frac{1}{2}}$（如果你愿意的话可以取为 $\overline{U_{\frac{1}{2}}}$）, 满足

$$A_0\subset U_{\frac{1}{2}}\subset A_{\frac{1}{2}}\subset U_1.$$

再重复这个过程两次, 我们得到

$$A_0\subset U_{\frac{1}{4}}\subset A_{\frac{1}{4}}\subset U_{\frac{1}{2}}\subset A_{\frac{1}{2}}\subset U_{\frac{3}{4}}\subset A_{\frac{3}{4}}\subset U_1.$$

□

注记. *有人可能会问：类似的性质是否对正则空间成立呢？答案是否定的. 一般地, 我们称一个拓扑空间是完全正则的, 如果对任意闭集 A 和任意 $x_0\notin A$, 存在连续函数 $f:[0,1]\to X$ 使得 $f(x_0)=0$ 且 $f(A)=1$. 一个正则但不完全正则的例子由 J.Thomas 在 1969 年给出, 可以在 Munkres 的第 31 节的 Problem11 找到它. 另一个相对简单的例子由 A.Mysior 构造, 参见 Proceeding of the Amer.Math.Soc.Vol. 81(4),1981,652-653.*

15.5 F_σ 和 G_δ 集

注意到 Urysohn 引理的结论是

$$A\subset f^{-1}(0),\quad B\subset f^{-1}(1).$$

一个自然的问题是：在相同的假设下, 我们能否构造连续函数 f 使得 $A=f^{-1}(0),B=f^{-1}(1)$?

对于度量空间这个问题有一个简单的答案, 因为函数 $f(x)=\dfrac{d(x,A)}{d(x,A)+d(x,B)}$ 就是这样的一个 f. 但一般地, 我们需要关于 A 和 B 的额外的假设.

为了看到这一点, 让我们先来研究下面这个更为基本的问题：存在连续函数 $f:X\to\mathbb{R}$ 使得 $f^{-1}(0)=A$ 的必要条件是什么?

当然我们需要 A 是闭集. 但这是不够的, 因为

$$\{0\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right),$$

我们必须有

$$f^{-1}(0)=\bigcap_{n=1}^{\infty}f^{-1}\left(\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right).$$

换句话说,$f^{-1}(0)$ 应该是 X 中可数个开集的交.

定义 15.3. *设 $(X,\mathscr{T})$ 是拓扑空间,$A\subset X$.*

(1) *我们称 A 是 G_δ 集如果它是开集的可列交.*

(2) *我们称 A 是 F_σ 集如果它是闭集的可数并.*

因此连续函数的水平集一定是闭的 G_δ 集. 事实上,

命题 15.4. 设 X 是正规的. 那么存在连续函数 $f: X \to [0,1]$ 使得 $f^{-1}(0) = A$ 当且仅当 A 是 X 中的闭 G_δ 集.

15.6 Urysohn 引理：一种变形

有了上面这个命题之后, 我们就很容易给之前的问题一个完满的回答, 技巧与度量空间的情形几乎是相同的.

定理 15.5 (Urysohn 引理的变形)**.** 设 $(X, \mathscr{T})$ 是正规空间,$A, B \subset X$. 那么存在连续函数 $f: X \to [0,1]$ 使得

$$f^{-1}(0) = A, \quad f^{-1}(1) = B$$

当且仅当 A, B 是 X 中的不交闭 G_δ 集.

16 保证正规的条件

在本节中我们将研究下列问题：在什么样的简单假定下,$(X,\mathscr{T})$ 是 (T4) 的？我们将通过某种"局部到整体"的论证来证明各种各样的结果.

16.1 紧性"提升"(T2) 和 (T3)

我们首先证明

定理 16.1. *任意紧 Hausdorff 空间是 (T4) 的.*

这是下面这个命题的推论, 它通过简单的"局部到整体"的论证说明了紧性是如何"提升"分离性质的.

命题 16.2. *对于拓扑空间, 我们有*

(1) *紧 +(T2)$\Longrightarrow$(T3)*

(2) *紧 +(T3)$\Longrightarrow$(T4)*

证明.

(1)

(2)

□

16.2 可数性"提升"(T3)

命题 16.3. *Lindelof+T3$\Longrightarrow$T4.*

证明. 设 A,B 是 X 中的不交闭集.

对任意的 $x\in X$, 存在开集 V_x 使得 $x\in V_x\subset\overline{V_x}\subset B^c$.

因为 A 是 Lindelof 的, 存在可列个 $V_1,V_2,\cdots$ 覆盖 A.

接下来是证明的分道扬镳之处, 由于 B 侧开集的可列交不一定是开集, 我们不能照搬紧性条件下的证明. 事实上, 如果不能交了,B 侧的开集毫无用处.

类似地, 我们能找到可数个开集 $U_1,U_2,\cdots$ 覆盖 B 并且 $U_i\subset\overline{U_i}\subset A$.

Lindelof 让我们找到可数个开集,T3 让开集满足 $V_j\subset\overline{V_j}\subset B^c$,$U_i\subset\overline{U_i}\subset A^c$. 但是, 这样构造出来的两族开集可能会相互重叠, 因此接下来要做的就是把重叠的部分挖掉.

令

$$G_n:=V_n\backslash\left(\bigcup_{i=1}^{n}\overline{U_i}\right),\quad H_m:=U_m\backslash\left(\bigcup_{j=1}^{m}\overline{V_j}\right).$$

注意到该构造使得 $G_n\cap H_m=\varnothing$ 对于任意 n,m 成立, 因为要么 $m\geqslant n$, 要么 $n\geqslant m$. 而序列更大的集合总是已经把对方的序列更小的集合给挖掉了. 我认为这里挖闭包的本质目的是为了让 G_n 和 H_m 仍是开集, 如果只是为了不交挖 U_i 和 V_j 已经足够了.

由于 $A\cap V_n\subset G_n$, 所以 $A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n$, 同理 $B\subset\bigcup_{m=1}^{\infty}H_m$.

因为 $G_n \cap H_m$ 对任意 n, m 成立, 所以 $\left(\bigcup_{n-1}^{\infty} G_n\right) \cap \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} H_m\right) = \varnothing$. □

注记. *比较命题 2.2. 和命题 2.3, 有人可能会问：是否有 Lindelof+T2⟹T3? 答案是否定的. 你可以在 Steen 和 Seebach 的 Counterexamples in Topology 中找到一个复杂的反例.*

16.3 局部紧“提升”(T2)

命题 16.4. *局部紧 +T2⟹T3.*

证明. 设 $x \in U$. 由局部紧性, 我们能找到一个紧集 K 使得 $x \in \mathring{K}$.

因为 X 是 T2 的, 所以 K 是 T2 的；又 K 是紧的, 所以 K 是 T3 的.

令 $W = U \cap \mathring{K}$. 那么 W 就是 x 在 K 中的开邻域.

由于 K 是 T3 的, 存在 K 中开集 V 使得

$$x \in V \subset \mathrm{Cl}_K(V) \subset W,$$

其中我们使用记号 $\mathrm{Cl}_K(V)$ 表示“V 在拓扑空间 K”中的闭包, 以便与 V 在 X 中的闭包 $\overline{V}$ 区分.

断言 V 实际上也是 X 中的开集, 并且 $\mathrm{Cl}_K(V)$ 与 $\overline{V}$ 一致.

- 因为 V 是 K 中开集, 并且 $V \subset W$,W 是 X 中开集, 因此 V 是 X 中开集.
- 因为 K 在 X 中是闭集,$V \subset K$, 所以 $\overline{V} \subset K$. 从而 $\overline{V} = \mathrm{Cl}_K(V)$.

因此我们实际上得到了一个 X 中的开集 V 满足

$$x \in V \subset \overline{V} \subset W \subset U,$$

这意味着 X 是 T3 的. □

注记. *存在复杂的反例说明 LCH 空间（从而 T3）不是 T4 的.*

16.4 拓扑流形是 (T4) 的

拓扑流形是一类非常良好且重要的拓扑空间, 在数学的各个领域都有应用.

定义 16.5. *拓扑流形是指一个拓扑空间满足 T2,A2 且局部欧几里得, 即对任意 $x \in X$ 存在一个邻域 U 同胚于 $\mathbb{R}^n$.*

因为任意局部欧氏空间是局部紧的, 结合命题 2.3 和命题 2.5 我们得到

命题 16.6. *任意拓扑流形是 T4 的.*

16.5 仿紧性：定义和例子

下面我们介绍仿紧的概念, 我们将会看到, 它是紧性、可数性与分离性的混合.

定义 16.7. *我们称拓扑空间 $(X, \mathscr{T})$ 是仿紧的如果对任意开覆盖都有局部有限的开加细.*

例 16.8. *紧空间是仿紧的.*

例 16.9. *仿紧空间的闭子集是仿紧的.*

证明. 设 X 是仿紧的,$A \subset X$ 是闭的. 设 $\mathscr{U}$ 是 A 的一族开覆盖. 令 $\mathscr{U}_1 = \mathscr{U} \cup \{A^c\}$, 那么它是 X 的一族开覆盖. 按定义, 它存在局部有限的开加细 $\widetilde{\mathscr{U}_1}$. 令

$$\widetilde{\mathscr{U}} = \left\{ U \in \widetilde{\mathscr{U}_1} \middle| U \subsetneq A^c \right\}.$$

容易看出 $\widetilde{\mathscr{U}}$ 是 A 的局部有限的开覆盖. □

因此仿紧是闭遗传的. 但是, 仿紧不是可遗传的, 即, 仿紧空间的任意子集可能不是仿紧的.

例 16.10. $\mathbb{R}^n$ *是仿紧的.*

证明. 设 $\mathscr{U}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的任意开覆盖. 对于任意 $x \in \mathbb{R}^n$, 存在 $0 < r_x \leqslant 1$ 和 $U \in \mathscr{U}$ 使得 $B(x, r_x) \subset U$. 令

$$\mathscr{U}_1 = \left\{ B(x, r_x) \middle| x \in \mathbb{R}^n \right\},$$

那么 $\mathscr{U}_1$ 是 $\mathscr{U}$ 的一个开加细.

现在考虑任意形如

$$\overline{B(a, \sqrt{n})}, \quad a \in \mathbb{Z}^n$$

的闭球, 它能够被有限多个 $\mathscr{U}_1$ 中的开球覆盖. 取出所有的这样的开球, 记为 $\widetilde{\mathscr{U}}$. 那么 $\widetilde{\mathscr{U}}$ 依然是 $\mathbb{R}^n$ 的一个开覆盖, 还是 $\mathscr{U}$ 的一个加细, 并且是局部有限的. □

注记. *更一般地,A.Stone 证明了*

定理 16.11 (Stone)**.** *任意度量空间是仿紧的.*

相反地,Smirnov 证明了

定理 16.12 (Smirnov)**.** *局部可度量化空间是可度量化的当且仅当它是仿紧且 Hausdorff 的.*

事实上,Nagata-Smirnov 给了可度量化一个完满的刻画:

定理 16.13 (Nagata-Smirnov)**.** *拓扑空间* $(X, \mathscr{T})$ *可度量化当且仅当它 T2,T3 且有一个局部有限基.*

16.6 仿紧“提升”(T2) 和 (T3)

一般地, 仿紧空间不一定是正规的. 但是, 正如紧性能够提升分离性公理一样, 仿紧性也能发挥相同的作用. 它的证明基于另一种“局部到整体”的论证和一个关于局部有限子集族 $\{A_\alpha\}$ 的一条基本事实,

$$\overline{\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} \overline{A}.$$

命题 16.14.

(1) *仿紧 +T2⟹T3*

(2) *仿紧 +T3⟹T4*

证明.

(1) 设 B 是闭的

$\square$

特别地, 我们得到了

定理 16.15 (Dieudonne)**.** *任意仿紧 Hausdorff 空间是正规的.*

16.7 仿紧 Hausdorff 空间的一个良好的加细

作为应用, 我们证明

引理 16.16. *设 X 是仿紧且 Hausdorff 的,$\mathscr{U}=\{U_\alpha\}$ 是 X 的一个开覆盖. 那么存在 $\mathscr{U}$ 的一个局部有限的开加细 $\mathscr{V}=\{V_\alpha\}$*[2]*使得 $\overline{V_\alpha}\subset U_\alpha$ 对任意 α 成立.*

证明. 因为 X 是仿紧且 Hausdorff 的, 所以它也是 (T3) 和 (T4) 的. 如果我们令

$$\mathscr{A}=\left\{A\in\mathscr{T}\middle|\exists U_\alpha\in\mathscr{U}\text{ s.t. }\overline{A}\subset U_\alpha\right\},$$

那么 $\mathscr{A}$ 是 X 的一个开覆盖（因为 $\{U_\alpha\}$ 是 X 的开覆盖, 所以对任意 $x\in X$, 存在 U_α 使得 $x\in U_\alpha$, 由于 X 是 (T3) 的, 所以存在开集 A 使得 $x\in A\subset\overline{A}\subset U_\alpha$, 所以这样的 $\mathscr{A}$ 能构成开覆盖.）.

令

$$\mathscr{B}=\left\{B_\beta\middle|\beta\in\Lambda\right\}$$

是 $\mathscr{A}$ 的一个局部有限的开加细（这是仿紧的定义）, 其中指标集 Γ 可能与 $\mathscr{A}$ 不同.

对于每个 β, 我们选取一个 $\alpha=f(\beta)$ 使得

$$\overline{B_\beta}\subset U_{f(\beta)}.$$

现在对每个指标 α, 令

$$V_\alpha=\bigcup_{f(\beta)=\alpha}B_\beta,$$

其中我们取 $V_\alpha=\varnothing$ 如果没有这样的 β 存在. 由 $\mathscr{B}$ 的局部有限性,

$$\overline{V_\alpha}=\overline{\bigcup_{f(\beta)=\alpha}B_\beta}=\bigcup_{f(\beta)=\alpha}\overline{B_\beta}\subset U_\alpha.$$

只剩下验证局部有限性：对于任意 $x\in X$, 存在 x 的开邻域 U_x 值域有限个 B_β 相较. 从而,U_x 只与那些满足 $f(\beta)=\alpha$ 的 α 相交. $\square$

16.8 仿紧性作为紧性 + 可数性 + 分离性

如果你盯一会 $\mathbb{R}^n$ 的仿紧性的证明, 你可能会看到我们用来构造局部有限开覆盖的关键事实是：

- 任意点 x 有一个紧邻域 $\overline{B(x,\sqrt{n})}$. 换句话说, 我们用了局部紧性.
- 整个空间能够被可数多个这样的紧球覆盖住, 这是某种整体可数性, 类似于 (A2) 或 Lindelof.

一个自然的问题是, 局部紧性加上可数性如 (A2) 能否推出紧性？遗憾的是一般来说答案是否定的：

[2]注意到这是一个非常强的加细因为 $\{V_\alpha\}$ 和 $\{U_\alpha\}$ 有相同的指标

例 16.17. 考虑 $X=\mathbb{R},\mathscr{T}=\{(-\infty,a)\big|a\in\mathbb{R}\}$. 那么

- $(X,\mathscr{T})$ 是局部紧的因为任意集合形如 $(-\infty,x]$ 是紧的.
- $(X,\mathscr{T})$ 是 *(A2)* 的因为 $\mathscr{B}=\{(-\infty,r)\big|r\in\mathbb{Q}\}$ 是一族可数基.
- 但它不是仿紧的因为开覆盖 $\mathscr{U}=\{(-\infty,n)\big|n\in\mathbb{Z}\}$ 没有局部有限的开加细.

在这个例子中遗漏了什么呢？这个拓扑不好因为它的开集太大而不能分离点（因此没有局部有限性）, 即, 它不是 Hausdorff 的！事实上局部紧性、可数性和 Hausdorff 一起蕴含着仿紧：

定理 16.18. 我们有 *Lindelof+* 局部紧 *+(T2)*$\Longrightarrow$ 仿紧.

注记. *Sorgenfrey* 直线 *Lindelof,T2,* 但不局部紧, 但它是仿紧的.

当然我们可以将 Lindelof 替换成更强的可数性例如 $(A2)$ 或 σ-紧.

考虑到命题 2.5, 我们只需要证明：

命题 16.19. 我们有 *Lindelof+(T3)*$\Longrightarrow$ 仿紧性.

证明. 令 X 是 Lindelof 和 (T3) 的. 设 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}$ 是 X 的任意开覆盖. 对于任意 $x\in X$, 选择 $\alpha(x)$ 使得 $x\in U_{\alpha(x)}$. 因为 X 是 (T3) 的, 所以我们能找到开集 V_x 和 W_x 使得

$$x\in V_x\subset\overline{V_x}\subset W_x\subset\overline{W_x}\subset U_{\alpha(x)}.$$

现在 $\mathscr{V}=\{V_x\}$ 是 X 的一个开覆盖. 因为 X 是 Lindelof 的, 我们能找到可数子覆盖

$$\{V_1,V_2,V_3,\cdots\}\subset\mathscr{V}.$$

我们记 $R_1=W_1$, 逐次定义

$$R_n=W_n\backslash(\overline{V_1}\cup\cdots\cup\overline{V_{n-1}}),\quad n>1.$$

断言 $\mathscr{R}=\{R_n\}$ 是 $\mathscr{U}$ 的局部有限的开加细. □

注记. *Sorgenfrey* 直线是 *T2* 的, 但不是局部紧的, 但是是正规的. 又考虑到它是 *Lindelof* 的, 所以它是仿紧的.

16.9

分离实际上有两类分离, 一类是几何上的分离, 一类是分析上的分离. 几何上的分离是用开集分离, 分析上的分离是用连续函数分离.Urysohn 引理告诉我们, 对于 T4 而言, 用开集分离和用连续函数分离是一样的.

17 PSet08-1

(1)[Closedness of graph]

Let X, Y be topological spaces, and assume Y is Huasdorff. The *graph* of a map $f : X \to Y$ is by definition the set

$$G_f := \{(x, f(x)) \big| x \in X\} \subset X \times Y.$$

(a) Prove: If f is continuous, then G_f is closed in $X \times Y$.

(b) Construct a discoutinuous function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ whose graph is closed.

(c) Prove: If Y is also compact, then f is continuous if and only if G_f is closed.

证明.

(a) 任取 $(x, y) \in X \times Y$,$y \neq f(x)$. 因为 $y \neq f(x)$, 所以存在开集 $U, V \subset Y$ 使得 $y \in U, f(x) \in V$ 并且 $U \cap V = \varnothing$. 因为 f 连续, 所以存在开集 $W \subset X$, 使得 $f(W) \subset V$. 从而 $(x, y) \in W \times U$ 并且 $W \times U \subset G_f^c$. 从而 G_f 是闭集.

(b) 注意到下一问, 容易构造出 $f(x) = \begin{cases} 1/x, & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$.

(c) 任取 $x_0 \in X$, 只需证对任意 $f(x_0)$ 的开邻域 $V \subset Y$, 存在 x 的开邻域 U 使得 $f(U) \subset V$.

任取 $y \neq f(x_0) \in Y$, 由于 G_f^c 是开集, 存在 $U_y \times V_y$ 使得 $(x_0, y) \in U_y \times V_y$ 并且 $U_y \times V_y \subset G_f^c$.

从而 $V \cup \bigcup_{y \neq f(x_0)} V_y$ 是 Y 的一个开覆盖, 由 Y 紧, 存在有限子覆盖 $V \cup \bigcup_{i=1}^n V_i$. 令 $U = \bigcap_{i=1}^n U_i$, 任取 $x \in U$, 按定义 $f(x) \notin V_i$, 从而 $f(x) \in V$. 得证.

□

(2)[Productive properties]

A topological property P is called *productive* if

$\boxed{\text{Each } (X_\alpha, \mathscr{T}_\alpha) \text{ satisfies } P \Longrightarrow (\prod_\alpha X_\alpha, \mathscr{T}_{product}) \text{ satisfies } P.}$

(a) Prove: (T1),(T2) and (T3) are productive.

(b) Conversely, if $(\prod_\alpha X_\alpha, \mathscr{T}_{product})$ is (T1),(T2) or (T3), can we conclude that each $(X_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)$ is (T1),(T2) or (T3)?

(c) Is (T4) productive? Is Lindelöf productive?

(d) Prove: *separable* and *metrizable* are not productive. What about (A1),(A2)?

(e) Can you introduce a weaker conception of productivity, so that those non-productive properties in part (d) satisfy the weaker one?

证明.

(a)

- (T1). 任取 $\prod\limits_{\alpha} X_\alpha$ 中两点 $(x_\alpha) \neq (y_\alpha)$, 存在指标 β 使得分量 $x_\beta \neq y_\beta$. 由 X_β 是 (T1) 的, 存在 x_β 的开邻域 $U \subset X_\beta$ 使得 $y_\beta \notin U$. 则 $\prod\limits_{\alpha\neq\beta} U \times X_\alpha$ 是 (x_α) 不包含 (y_α) 的开邻域.
- (T2). 证明同 (T1).
- (T3). 任取 (x_α) 和其开邻域 U, 存在 $\prod\limits_{\alpha} U_\alpha$ 使得 $(x_\alpha) \in \prod\limits_{\alpha} U_\alpha \subset U$, 其中只有有限个 $U_\alpha \neq X_\alpha$. 对这有限个 U_α, 由于 X_α 是 (T3) 的, 存在 V_α 使得 $x_\alpha \in V_\alpha \subset \overline{V}_\alpha \subset U_\alpha$. 令其余的 $V_\alpha = X_\alpha$, 则

$$x \in \prod_{\alpha} V_\alpha \subset \prod_{\alpha} \overline{V}_\alpha = \overline{\prod_{\alpha} V_\alpha} \subset \prod \subset \prod_{\alpha} U_\alpha \subset U,$$

其中 $\prod\limits_{\alpha} \overline{V}_\alpha = \overline{\prod\limits_{\alpha} V_\alpha}$ 是在PSet04-1-2 中证明的.

(b)

- (T1). 任取 X_β 中两点 $x_\beta \neq y_\beta$, 考虑 (x_α) 和 (y_α), 其中 $x_\alpha = y_\alpha$, 只要 $\alpha \neq \beta$. 那么由于 $\prod\limits_{\alpha} X_\alpha$ 是 (T1) 的, 存在 (x_α) 的开邻域 $\prod\limits_{\alpha} U_\alpha$ 使得 $(y_\alpha) \notin \prod\limits_{\alpha} U_\alpha$, 但这只可能是因为 $y_\beta \notin U_\beta$, 这样我们就找到了 x_β 的开邻域 U_β 使得 $y_\beta \notin U_\beta$.
- (T2). 证明同 (T1).
- (T3). 任取 X_β 中 x_β 和它的开邻域 U_β, 考虑 (x_α) 和 $U_\beta \times \prod\limits_{\alpha\neq\beta} X_\alpha$, 由于 $\prod\limits_{\alpha} X_\alpha$ 是 (T3) 的, 存在 (x_α) 的开邻域 $\prod\limits_{\alpha} V_\alpha$ 满足

$$(x_\alpha) \in \prod_{\alpha} V_\alpha \subset \overline{\prod_{\alpha} V_\alpha} = \prod_{\alpha} \overline{V_\alpha} \subset U_\beta \times \prod_{\alpha\neq\beta} X_\alpha,$$

则 $x_\beta \in V_\beta \subset \overline{V_\beta} \subset U_\beta$.

(c)

(d)

- 直觉上, 可数个可分空间的乘积应该是可分的. 设 $\{X_n\}$ 是可分空间,$\{A_n\}$ 是它们的可数稠密子集. 首先会猜测 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ 会不会是 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ 的可数稠密子集, 但由 Cantor 对角线技巧, 容易证明 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ 是不可数的. 回想起 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ 中的基的样子, 意识到我们不需要把所有的 A_n 乘起来. 利用可数选择公理, 在每一个 A_n 中选出一个元素 a_n, 考虑

$$A_1 \times \{a_2\} \times \{a_3\} \times \cdots,$$

$$A_1 \times A_2 \times \{a_3\} \times \cdots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

每一行都只涉及到有限个可数集的乘积, 从而是可数的；将所有行并起来, 这是可数个可数集的并, 也是可数的. 断言这样得到的集合 A 就是 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ 的可数稠密子集.

任取 $(x_n) \in \prod\limits_{n=1}^{\infty} X_n$, 任取 U 是包含 (x_n) 的基元素.U 形如 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} U_n$, 其中只有有限个 U_n 不是 X_n, 从而存在 N, 使得对于任意 $n > N$,$U_n = X_n$. 而显然 $U \cap A_1 \times \cdots \times A_N \times \{a_{N+1}\} \times \cdots$ 非空, 从而 $(x_n) \in \overline{A}$. 得证.

- 这告诉我们, 要想构造反例, 必须考虑不可数个可分空间的乘积.
- 可数个可度量化空间得乘积是可数的. 设 (X_n, d_n) 是度量空间, 在 $\prod\limits_{\alpha}$
- 本来想考虑 $\{0,1\}^{\mathbb{R}}$,$\mathbb{N}^{\mathbb{R}}$,$\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ 之类的例子, 但是注意到了后面的一个命题, 任意多个第二可数空间的乘积是第二可数的.

(e)

(f) 仿紧空间的乘积不一定是仿紧的, 比如 Sorgenfrey 直线是仿紧的, 但 Sorgenfrey 平面不是仿紧的.

□

(4)[Baire space]
A topological space is called a *Baire space* if every intersection of a countable collection of open dense sets in the space is also dense.

(a) Use "open-closed" duality to give an equivalent characterization of Baire space.

(b) Prove: Any complete metric space is a Baire space.

(c) Prove: Any compact Hausdorff space is a Baire space.

(d) Prove: Any locally compact Hausdorff space is a Baire space.

证明.

(a) 设 A_n 是稠密开集, 则

$$\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n} = X \Longleftrightarrow \left(\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n}\right)^c = X^c \Longleftrightarrow \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right)^{\circ} = \varnothing$$

也就是无处稠密闭集的可列并依旧是无处稠密的.

(b)

(c)

(d)

□

Chapter 9

Tietze 扩张定理

1 Tietze 扩张定理

1.1 Tietze 扩张定理

尽管我们通过 Urysohn 引理得到的函数看起来非常特殊, 但是正如我们在 Urysohn 度量化定理和 Urysohn 引理的变形的证明中看到的, 它们能够用来构造满足某些特定性质的更复杂的连续函数. 在本节中我们将给出 Urysohn 引理的另一个应用,Tietze 扩张定理[1], 它能够被视作 Urysohn 引理的推广（尽管它们实际上是等价的）, 因此能够直接应用于更多的场合. 它是拓扑中最有用的定理之一.

我们从平凡的定义开始

定义 1.1. *设 $A \subset X$ 是子集. 我们称映射 $\tilde{f} : X \to Y$ 是映射 $f : A \to Y$ 的扩张如果 $\tilde{f}\big|_A = f$.*

在分析中, 一个重要的问题是如何将一个给定函数从较小的定义域延拓到更大的定义域, 同时保持连续性、光滑性和有界性等性质. 一般地, 如果 A 不是闭集我们不能够希望将 A 上所有的连续函数都从 A 延拓到 X 上. 但是, 如果 A 是闭集并且 X 是正规的, 那么 Tietze 扩张引理告诉我们任意（有界）连续函数都有 X 上的一个（有界）连续延拓.

注记. *有关复分析全纯开拓的内容可参见Complex Analysis.*

定理 1.2. *一个拓扑空间 $(X, \mathscr{T})$ 是正规的当且仅当对于任意闭子集 $A \subset X$ 和任意连续映射 $f : A \to [-1, 1]$, 存在连续映射 $\tilde{f} : X \to [-1, 1]$ 是它的延拓.*

证明.

- $\Longleftarrow$ 设 A, B 是 X 中的不交闭集. 那么 $A \cup B$ 是 X 在 X 中是闭的, 且

  $$f : A \cup B \to [-1, 1], \quad f(x) = \begin{cases} -1, & x \in A \\ 1, & x \in B \end{cases}$$

  是 $A \cup B$ 上的连续映射. 由假设,f 能够延拓为连续映射 $\tilde{f} : X \to [-1, 1]$ 满足 $\tilde{f} = f$ 在 $A \cup B$ 上成立.

  因为 $f^{-1}((-\infty, 0))$ 和 $f^{-1}((0, +\infty))$ 是 X 中分离 A 和 B 的不交开集,X 是正规的.

[1]根据维基百科, 该定理最初由 Brouwer 和 Lebesgue 对于 $X = \mathbb{R}^n$ 的特殊情形给出证明, 后来被 Tietze 推广到所有的度量空间. 目前的正规空间的版本是由 Urysohn 证明的.

- $\Longrightarrow$ $\boxed{\text{思路}}$

  考虑限制映射
  $$R : \mathcal{C}(X, [-1, 1]) \to \mathcal{C}(A, [-1, 1]), \quad g \mapsto g\big|_A.$$
  为了证明 R 是满射, 即解方程
  $$Rg = f,$$
  我们应用分析中的标准技巧：

  (1) 找到一个近似解.

  (2) 迭代得到更好的近似.

  (3) 证明近似解的序列极限是解.

  现在我们实现想法.

  $\boxed{\textbf{Step 1}}$[构造一个近似解]

  首先我们用 $\bar{f} : A \to \mathbb{R}$ 来近似函数 f, 其中
  $$\bar{f}(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{3}, & f(x) \geqslant \dfrac{1}{3}, \\ f(x), & |f(x)| \leqslant \dfrac{1}{3}, \\ -\dfrac{1}{3}, & f(x) \leqslant -\dfrac{1}{3}. \end{cases}$$
  根据构造我们有 $|f(x) - \bar{f}(x)| \leqslant \dfrac{2}{3}$ 对任意 $x \in A$ 成立. 下面我们利用 Urysohn 引理来寻找一个连续函数 $g : X \to \mathbb{R}$ 使得
  $$Rg \approx \bar{f}.$$
  有一个非常明显的 g 的候选：因为
  $$A_1 := \left\{ x \in A \middle| f(x) \geqslant \frac{1}{3} \right\} \text{和} B_1 := \left\{ x \in A \middle| f(x) \leqslant -\frac{1}{3} \right\}$$
  是 X 中的不交闭集, 那么存在连续函数 $g : X \to [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ 使得
  $$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3}, & x \in A_1 \\ -\dfrac{1}{3}, & x \in B_1. \end{cases}$$
  容易看到 $g(x)$ 也满足
  $$|f(x) - Rg(x)| \leqslant \frac{2}{3}, \quad \forall x \in A.$$
  $\boxed{\textbf{Step 2}}$[迭代]

  $\boxed{\textbf{Step 3}}$[收敛到解]

$\square$

1.2 延拓无界函数

显然在 Tietze 延拓定理的叙述中, 我们能够将值域 $[-1,1]$ 替换为任意的闭区间 $[a,b]$. 一个不太显然的推广是：$[-1,1]$ 能够替换为 $\mathbb{R}$.

定理 1.3 (无界函数的 Tietze 延拓定理)**.** *设 X 是正规的,$A \subset X$ 是闭的. 那么任意连续函数 $f: A \to \mathbb{R}$ 能够被延拓为连续函数 $\tilde{f}: X \to \mathbb{R}$.*

证明. 将 f 复合上函数 arctan, 我们得到一个连续函数 $f_1 := \arctan \circ f : A \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

由 Tietze 延拓定理, 我们能够将 f_1 延拓为一个连续函数

$$\tilde{f}_1 : X \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

设

$$B = \tilde{f}_1^{-1}(\pm\frac{\pi}{2}).$$

那么 B 是 X 中的闭集, 且 $B \cap A = \varnothing$. 由 Urysohn 引理, 存在一个连续函数 $g: X \to [0,1]$ 使得

$$\begin{cases} g(x) = 1, & x \in A \\ g(x) = 0, & x \in B \end{cases}.$$

定义

$$h(x) = \tilde{f}_1(x) g(x).$$

那么 h 是将 X 映到 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 的连续函数. 最后我们得到

$$\tilde{f}(x) = \tan h(x).$$

那么 $\tilde{f}: X \to \mathbb{R}$ 是连续的, 且

$$\tilde{f}(x) = \tan h(x) = \tan \tilde{f}_1(x) = \tan f_1(x) = x, \quad \forall x \in A.$$

□

1.3 关于延拓连续函数的三点注记

我们列举关于延拓连续函数的三点注记：

注记. *显然我们也能够延拓向量值连续函数*

$$f: A \to [0,1]^n, \quad f: A \to \mathbb{R}^n, \quad f: A \to [0,1]^S$$

到 X 上的连续向量值函数, 即

$$\tilde{f}: X \to [0,1]^n, \quad \tilde{f}: X \to \mathbb{R}^n, \quad \tilde{f}: X \to [0,1]^S,$$

其中 S 是一个任意的集合. 为了做到这一点, 只需要延拓 f 的每一个分量.

类似地, 我们可以在延拓复值函数的同时保持有界, 或将光滑函数延拓到光滑函数, 或延拓 Lipschitz 函数等等.

注记. 取代假设 X 是正规的, 我们可以假设 X 是局部紧 *Hausdorff* 的. 重要的观察是：尽管局部紧 *Hausdorff* 空间不必是正规的（所以我们可能无法分离不交闭集）, 我们仍然有良好的分离性质, 即 *Lec12* 中的命题 *1.13,* 允许我们将紧集与闭集分离开来！我们列举 *LCH* 版本的 *Urysohn* 引理和 *Tietze* 扩张定理, 把它们的证明留作练习：

定理 1.4 (Urysohn 引理,LCH 版本)**.** 设 X 是 *LCH* 空间,K, F 是 X 中的不交集合, 其中 K 是紧的,F 是闭的. 那么存在一个连续函数 $f : X \to [0, 1]$ 使得 $f(K) = 1$ 且 $f(F) = 0$.

定理 1.5 (Tietze 扩张定理,LCH 版本)**.** 设 X 是 *LCH* 空间,K 是紧集. 那么任何 $f : K \to \mathbb{R}$ 的连续函数能够被延拓为具有紧支集的连续函数 $f : X \to \mathbb{R}$.

注记. 另一方面, 对于一般的拓扑空间 Y, 我们不能期待将任何连续函数 $f : A \to Y$ 延拓为连续函数 $\tilde{f} : X \to Y$.

- 为了将函数 $f : \{0, 1\} \to Y$ 延拓为连续函数
$$\tilde{f} : [0, 1] \to Y,$$
一个必要条件是：$f(0)$ 与 $f(1)$ 落在 Y 的同一个道路连通分支中.

- 为了延拓 $f : \mathbb{S}^1 \to Y$ 到连续函数 $\tilde{f} : \mathbb{D} \to Y$, 其中 $\mathbb{D}$ 是平面中的单位圆盘, 我们需要像集 $f(\mathbb{S}^1)$ 在 Y 中是可收缩的. 特别地, 我们将看到恒同映射
$$f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1, x \mapsto x$$
不能延拓成连续函数 $\tilde{f} : \mathbb{D} \to \mathbb{S}^1$.

我们将在本课程的后半段研究这些连通性现象.

2 Tietze 扩张定理的应用

Tietze 扩张定理有许多应用. 例如, 在实分析中,Tietze 扩张定理被用来得到一系列连续函数近似一个给定的可测函数. 接下来我们将给出 Tietze 扩张定理的更多应用.

2.1 应用 1：度量空间中的伪紧性

我们在 Lec9 中提到度量空间 X 是紧的当且仅当它是伪紧的, 即 X 上的任意连续函数都是有界的. 现在我们要证明这一点.

命题 2.1. *度量空间 (X,d) 是紧的当且仅当任意连续函数 $f:X\to\mathbb{R}$ 是有界的.*

证明. 如果 (X,d) 是紧的, 那么由极值原理, 任意连续函数 $f:X\to\mathbb{R}$ 是有界的.

为了证明反面, 我们用反证法. 假设 (X,d) 不是紧的, 那么存在 $A=\{x_1,x_2,\cdots\}$ 使得 $A'=\varnothing$. 从而 A 是闭的而且 x_n 是 A 中的孤立点. 所以函数

$$f:A\to\mathbb{R}, f(x_n)=n$$

在 A 上是连续的. 由 Tietze 扩张定理, 存在连续函数 $\tilde{f}:X\to\mathbb{R}$ 使得 $\tilde{f}=f$ 在 A 上成立. 显然 $\tilde{f}$ 是 X 上的无界连续函数, 矛盾. □

注记. *我们实际上证明了：(T4)+ 极限点紧 $\Longrightarrow$ 伪紧.*

2.2 应用 2：利用 Cantor 集构造充满空间的曲线

2.3 应用 3：单位分解

- 单位分解的定义
- 单位分解的存在性：仿紧 +Hausdorff
- 引理：
- 单位分解的存在性,LCH 版本

在流形上发展分析的最重要的工具之一是（从属于某个开覆盖的）单位分解.

定义 2.2. *我们称一族函数 $\{\rho_\alpha\}$ 是一个（连续）单位分解如果*

(1) *每个 $\rho_\alpha:X\to[0,1]$ 是连续的.[注意,ρ_α 定义在整个 X 上！]*

(2) *集族 $\{\operatorname{supp}\rho_\alpha\}$ 是局部有限的.*

(3) *对任意 $x\in X,\sum\limits_\alpha\rho_\alpha(x)=1$.*

我们称 $\{\rho_\alpha\}$ 是从属于开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 的单位分解如果

(4) *对于任意 $\alpha,\operatorname{supp}\rho_\alpha\subset U_\alpha$.*

注意到 (1) 和 (2) 保证了 (3) 中的和式是一个连续函数.

事实上保证单位分解的存在性的最重要的元素是仿紧性：

定理 2.3 (单位分解的存在性)**.** *设 X 是仿紧的和 Hausdorff 的. 那么对 X 的任意开覆盖 $\{U_\alpha\}$, 存在从属于 $\{U_\alpha\}$ 的单位分解.*

在证明单位分解的存在性之前, 我们先来证明一个简单的版本：

引理 2.4 (简单单位分解)**.** *设 X 是正规的,$\{K_\alpha\},\{U_\alpha\}$ 是 X 的局部有限的覆盖, 对每个 α,K_α 是闭的而 U_α 是开的, 并且 $K_\alpha \subset U_\alpha$. 那么存在连续函数 $f_\alpha : X \to [0,1]$ 使得*

(1) *在 K_α 上 $f_\alpha > 0$.*

(2) *在 U_α^c 上 $f_\alpha = 0$.*

(3) *$\sum_\alpha f_\alpha(x) = 1$ 对任意 $x \in X$ 成立.*

证明. 由 Urysohn 引理, 存在连续函数 $g_\alpha : X \to [0,1]$ 使得在 K_α 上 g_α 取值为 1, 在 U_α^c 上取值为 0.

定义 $g(x) = \sum_\alpha g_\alpha(x)$. 那么在开集

现在我们令

$$f_\alpha = \frac{g_\alpha(x)}{g(x)}.$$

容易验证 $\{f_\alpha\}$ 正是我们需要的. □

注记. 对于 *LCH* 我们也有一个有用的单位分解的版本. 在这种情形下我们需要假定空间是 σ-紧的 (对于 *LCH* 空间这等价于 *Lindelöf*) 来保证仿紧性, 并且相比对于每个 U_α 构造一个 ρ_α, 我们能够构造克列个连续函数 $\{\rho_n\}$ 使得 $\{\mathrm{supp}(\rho_n)\}$ 是 $\{U_\alpha\}$ 的一个加细, 即, 对每个 n, 存在一个 $U_\alpha \in \mathscr{U}$ 使得 $\mathrm{supp}(\rho_n) \subset U_\alpha$. 除此之外, 正如 *LCH* 版本的 *Tietze* 延拓定理, 我们能够要求每个 ρ_n 是紧支撑的.

定理 2.5 (单位分解的存在性,LCH 版本)**.** *设 X 是局部紧 Hausdorff 和 σ-紧的. 那么对于任意 X 的开覆盖 $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}$, 存在单位分解 $\{\rho_n\}$ 使得*

(1) *每个 $\mathrm{supp}(\rho_n)$ 是紧的.*

(2) *对每个 n, 存在 $U_\alpha \in \mathscr{U}$ 使得 $\mathrm{supp}(\rho_n) \subset U_\alpha$.*

2.4 应用 4：将流形嵌入到 $\mathbb{R}^N$

3 PSet08-2

(4)[Retraction]

Let X be a topological space, $A \subset X$ be a subspace. We say A is a *retract* of X if there exists a continuous map $r : X \to A$ such that

$$r(x) = x, \quad \forall x \in A.$$

Such a map r is called a *retraction*. Prove:

(a) A is a retract of X if and only if for any topological space Y, any continuous map $f : A \to Y$ has an continuous extention $\tilde{f} : X \to Y$.

(b) Suppose X is normal and A is closed. Prove: If Y is a retract of $\mathbb{R}^J$ (with product topology, where J is any set), then any continuous map $f : A \to Y$ admits a continuous extension $\tilde{f} : X \to Y$.

(c) Prove: Any closed subset B of the Cantor set C is a retract of C.

(d) Prove: For any compact metric space (X, d), there exists a continuous surjective map $f : C \to X$, where C is the Cantor set.

证明.

(a)
- $\Longrightarrow$ 令 $\tilde{f} = f \circ r$ 即可.
- $\Longleftarrow$ Id_A 的延拓便是从 X 到 A 的收缩映射.

(b) $f : A \to Y \hookrightarrow \mathbb{R}^J$, 由 Tietze 延拓定理, 存在延拓 $F : X \to \mathbb{R}^J$, 则 $r \circ F$ 是所求的延拓.

(c)

(d)

$\square$